Mathematik für Informatiker

Prof. Dr. Benno Fuchssteiner

Mengenlehre – Aussagenlogik

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten Wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem ganzen. Die Objekte heißen Elemente dieser Menge. Zwei Mengen sind gleich ($M_1 = M_2$), wenn ihre Elemente gleich sind.

Mengen: M, B, α, … # Ist a Element von M, so schreiben wir $a \in M$
Def.: durch Aufzählung M={1,2,15, Regenwurm} $1 \in M$, … Regenwurm$\in M$
Wenn b nicht Element von M, dann $b \notin M$
Leere Menge: $\emptyset$ hat keine Menge $1 \notin \emptyset$, $\emptyset \notin \emptyset$
$M=\{1,2,\emptyset\}$ – $\emptyset \in M$

N ist die Menge aller positiven Zahlen
N_0 ist die Menge der nichtnegativen Zahlen

P = Primzahlen	R_+ = die nichtnegative reelle Zahlen
Z = ganze Zahlen	Q = rationale Zahlen, Q_+ = …
R = reelle Zahlen	C = Komplexe Zahlen

$\{n>2 | n \in N\}$ oder $\{n | n>2$ und $n \in N\}$
$\{n | n>2 \wedge n \in N\}$ $\wedge$ = „und"
$\{n^2 | n \in N\}$
{n|n ist Hörer der Mathematikvorlesung}
{n|n ist ein Sandkorn in der Wüste}

$M: = \{n \notin n\}$ Frage: Ist $M \in M$? - Paradoxon

$P=\{n | n \in N \wedge (ab=n \wedge a \in N \wedge b \in N) \Rightarrow (a=n \vee b=n)\}$

Def.: M1 heißt Teilmenge von M2, wenn jedes Element von M1 auch Element von M2 ist $M1 \subset M2$, $M2 \supset M1$

Frage: $N \subset N$? – ja
$A \Rightarrow B$ Abkürzung von: aus A folgt B
wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr
A:= „Das höchste Haus in Paderborn ist 700m hoch"
B:= „Heute ist der 24.12.2007" $A \Rightarrow B$
Abk.: $\vee$ = „oder" $\neg$ = „nicht"

$M1 \subset M2$ heißt $x \in M1 \Rightarrow x \in M2$

Neue Operationen
$M1 \cap M2 = \{a | a \in M1 \wedge a \in M2\}$ Durchschnittsmenge von $M1 \wedge M2$

$M1 \cup M2 = \{a | a \in M1 \vee a \in M2\}$ Vereinigungsmenge von $M1 \wedge M2$
$M1 \setminus M2 = \{a | a \in M1 \wedge a \notin M2\}$ Differenzmenge von $M1 \wedge M2$

Frage: gilt $(M1 \cap M2) \cup M3 = M1 \cup (M2 \cap M3)$

Es gilt: $M1 \setminus (M2 \cap M3) = (M1 \setminus M2) \cup (M1 \setminus M3)$

n-Tupel:

Wenn $a_1, \ldots a_n$ mathematische Objekte, dann $(a_1, \ldots a_n)$ n-Tupel
M1, M2 seien Mengen
$M1xM2 := \{(a_1,a_2) | a_1 \in M1 \wedge a_2 \in M2\}$ – $(a_1,a_2) \neq (a_2,a_1)$

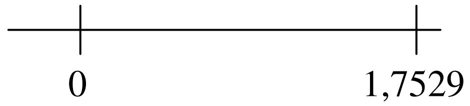
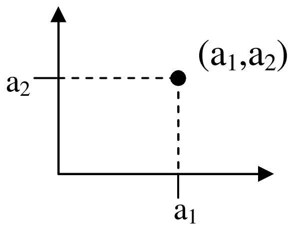


Bild von R



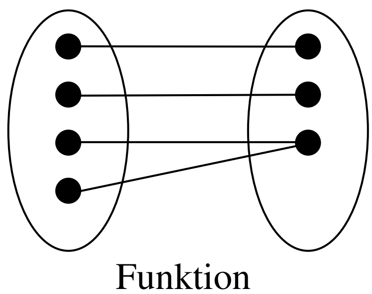
$RxR = \{(a_1,a_2) | a_1 \in R \wedge a_2 \in R\}$

Relation

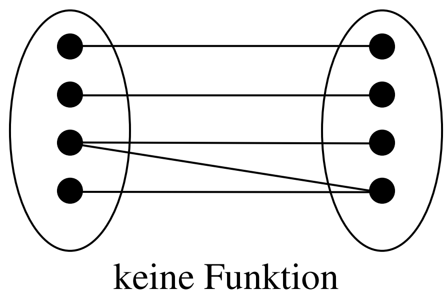
M1, M2 seien Mengen, dann heißt eine Teilmenge von M1xM2 Relation zwischen $M1 \wedge M2$
$\varphi = \{(a_1,a_2) | a_1 \in R, a_2 \in R,\ a_2 - a_1 \in R_+\} \Leftrightarrow a_2 \geq a_1$
$T = \{(a_1,a_2) | a_1 \in Z, a_2 \in Z$, es gibt ein $n \in Z$ mit $n * a_1 = a_1\} \subset ZxZ$

Funktion

A, B seien Mengen. Eine Vorschrift f, die jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $b \in B$ zuordnet, heißt Funktion von A nach B.
Schreibweise von $f: A \rightarrow B$ das zugeordnete Element schreiben wir als $f_{(a)}$
f: Student $\rightarrow$ Matrikelnummer
f: Ehemann $\rightarrow$ Ehefrau



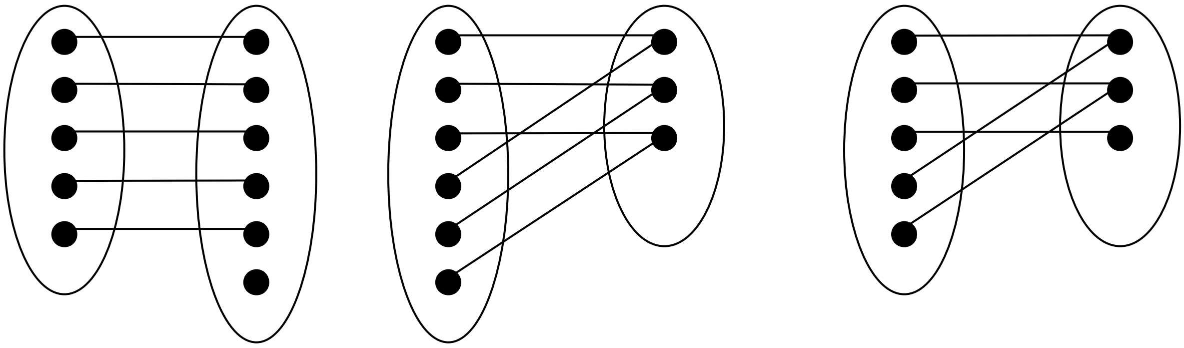
Funktion



keine Funktion

Relation $\varphi = \{(x, x^2) | x \in R\} \subset RxR$

<u>Zuordnung:</u> Jedem $x \in R$ wird zugeordnet alle $y \in R$ mit $(x,y) \in \varphi$
diese Funktion heißt Parabel



M1 f M2 M2 g M3 M1 $f*g$ / $g(f_{(x)})$ M3
Konkatenation (@) von Funktionen

$f: R_+ \rightarrow R_+$ $f_{(x)}=x^2$ $g_{(x)}=\sqrt{2}$ Umkehrfunktion

G_f sei Graph einer Funktion $M \rightarrow S$
G_g sei Graph einer Funktion $S \rightarrow K$
$G_{g@f}=\{(a,g(f_{(a)})|a \in M\}$ heißt Konkatenation

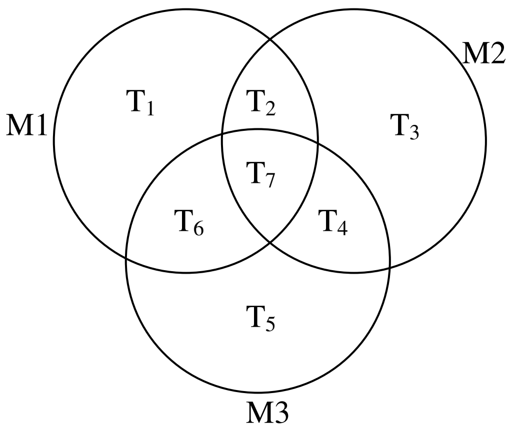
Def.: A, B seien Mengen $\varphi: A \rightarrow B$ sei Funktion
$\Rightarrow \tilde{A} \subset A$ $\varphi(\tilde{A}):=\{\varphi_{(a)}|a \in \tilde{A}\}$ (Menge $\tilde{N} \subset N$)
$\varphi(\tilde{A})$ heißt Bild von $\tilde{A}$ unter φ
$\Rightarrow \tilde{N} \subset N$ $\varphi^{-1}(\tilde{N}):=\{a|\varphi(a) \in \tilde{N}\}$
$\varphi^{-1}(\tilde{N})$ heißt Urbild von $\tilde{N}$ unter φ

A sei endliche Menge: Eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$, die bijektiv ist, heißt Permutation von A (Manchmal sagt man auch „Anordnung")

Wir nummerieren die Elemente von A durch $a_1, a_2, \ldots a_m$
$f: A \rightarrow A$ $f(a_k) := a_{n_k}$ (f bijektiv)
Schreibe die a_{n_k} gemäß der Reihenfolge der k an

$$\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots & a_m \\ | & | & & | \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \ldots & a_{n_m} \end{array}$$

Mengen: M1, M2, M3
Es gilt: $M1 \setminus (M2 \cap M3) = (M1 \setminus M2) \cup (M1 \setminus M3)$
Wie beweist man das? / Wie versteht man das?



$M1=T1 \cup T2 \cup T7 \cup T6$
$M1 \cap M2=T2 \cup T7$
$M1 \setminus M2=T1 \cup T6$
$M1 \setminus M3=T1 \cup T2$
$M2 \cap M3=T7 \cup T4$
Es stimmt

$M1\setminus(M2\cap M3)=T1\cup T2\cup T7\cup T6)\setminus(T7\cup T4)=T1\cup T2\cup T6$
$(M1\setminus M2)\cup(M1\setminus M3)=(T1\cup T6)\cup(T1\cup T2)=T1\cup T2\cup T6$

Wie beweise ich A=B (für Mengen)?
$\forall x\ (x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in A)$
oder
$\forall x\ (x\in A\Leftrightarrow x\in B)$

Beweis für $M1\setminus(M2\cap M3)=(M1\setminus M2)\cup(M1\setminus M3)$
Wir haben zu zeigen: 1) $x\in M1\setminus(M2\cap M3)\Rightarrow x\in(M1\setminus M2)\cup(M1\setminus M3)$
2) $x\in(M1\setminus M2)\cup(M1\setminus M3)\Rightarrow x\in M1\setminus(M2\cap M3)$

$x\in M1\setminus(M2\cap M3)$
$x\in M1\wedge x\notin(M2\cap M3)$
$x\in M1\wedge(x\notin M2\vee x\notin M3)$
$(x\in M1\wedge x\notin M2)\vee(x\in M1\wedge x\notin M3)$
$(x\in(M1\setminus M2))\vee(x\in M1\setminus M3)\Rightarrow x\in(M1\setminus M2)\cup(M1\setminus M3)$

Aussagenlogik

Syntax, Theorie, Semantik

- Symbolsatz {x, y, A, B, $x\in M$, α, ...} endlich oder unendliche Menge, diese nennen wir Aussagenvariablen
- weitere 5 Symbole (Junktoren) $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- 2 ausgezeichnete Werte {W, f} Wahrheitswerte
- Konstanten $\{C_1, C_2, \ldots\}$ für diese Konstante gibt es eine fixierte Funktion $W_f: \{C_1, C_2, \ldots\} \rightarrow \{W, f\}$

Die Menge bestehend aus diesen Symbolen nennen wir Basissätze!

Semantik

W="Wahr", f="falsch", $\wedge$="und", $\vee$="oder", $\rightarrow$="impliziert" (hat zur Folge), $\leftrightarrow$="ist äquivalent", $\neg$="nicht"

Bsp.:

Aussagenlogik: „Am Tage x regnet es", $x\in M$
Konstanten: „Cäsar war ein Mensch" $\rightarrow$ W
„Der Januar hat 31 Tage" $\rightarrow$ W

Syntax:

Wir legen fest, was eine Aussage ist.

1) „Jede Basisaussage ist eine Aussage"
2) „Wenn A und B Aussagen sind, dann sind auch $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$, $(\neg A)$ ebenfalls Aussagen
3) Jede Aussage entsteht durch die Regeln 1 und 2

$(A\rightarrow B)\vee(C\rightarrow(R\vee B)\wedge C)\leftrightarrow(T\leftrightarrow A)\vee Q$

Bsp.:

AV: Aussagenvariablen, B: Basissätze, A: Aussagen

Theorie:

Wir betrachten eine beliebige Funktion φ: AV$\rightarrow$\{W, f\}
Wir nennen dies eine Variablenbelegung. Dies wollen wir durch (vernünftige) Regeln zu einer Funktion ausdehnen: φ^*:A$\rightarrow$\{W, f\} Wahrheitsfunktion

Aussagen auf Basisaussagen $\varphi^*_{(w)}$:=w, $\varphi^*_{(f)}$:=f, $\varphi^*_{(C)}$:=wf$_{(C)}$ – Konstante

$\varphi^*(A)$	$\varphi^*(B)$	$\varphi^*(\neg A)$	$\varphi^*(A\vee B)$	$\varphi^*(A\wedge B)$	$\varphi^*(A\rightarrow B)$	$\varphi^*(A\leftrightarrow B)$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Zwei Aussagen A1, A2$\in$ A heißen logisch Äquivalent, wenn sie für jede Wahrheitsfunktion φ^* auf denselben Wert abgebildet werden (Zeichen: $\cong$ logisch Äquivalent)

$A\vee(\neg A)\cong W$

$(\neg A\rightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow f)\cong A\leftrightarrow W$ „Indirekter Beweis“

$A\rightarrow B\cong\neg A\vee B$

$A\leftrightarrow B\cong(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

$A\leftrightarrow B\cong(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$

$A\vee(B\wedge C)\cong(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$A\wedge(B\vee C)\cong(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

$\varphi^*(A)$	$\varphi^*(B)$	$\varphi^*(\neg A)$	$\varphi^*(\neg B)$	$\overbrace{(\neg A\vee B)}^{\alpha}$	$\overbrace{(\neg B\vee A)}^{\beta}$	$(\alpha\wedge\beta)$	$\varphi^*(A\leftrightarrow B)$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w

Eine Aussage heißt allgemein gültig, wenn sie von jedem W abgebildet wird.

Korrekte mathematische Sätze (im Rahmen dieser Logik) $\cong$ allgemeingültige Aussage
$A\vee(\neg A)$ ist eine allgemeingültige Aussage

Satz: Es gilt $A\cong B$ genau dann, wenn $A\leftrightarrow B$ allgemeingültig ist bzw. $(A\leftrightarrow B)\cong W$

Def.:

Eine Aussage heißt $\wedge$-vereinfacht, wenn sie von der Form ist $\alpha=T_1\wedge T_2\wedge T_3\wedge\ldots\wedge T_n$, wobei die T_i von der Form sein müssen $T_i=A_1\vee A_2\vee A_3\vee\ldots\vee A_{ik}$, wobei A_i oder die $\neg A_i$ Basisaussagen sind (T_i heißen oder-Terme).

Bsp.:

1. $A_1\vee(A_2\wedge(\neg A_3))$ nicht vereinfacht
2. $A_1\wedge(A_2\vee(\neg A_3))$ ist vereinfacht
3. $A_1\wedge(A_2\vee(\neg A_3\wedge A_4))$ nicht vereinfacht

Jede Aussage lässt sich zu einer logisch äquivalenten $\wedge$-vereinfachter Aussage umformen.

Das geht so:

- Ersetzen aller Terme $\alpha\rightarrow\beta$ durch $(\neg\alpha)\vee\beta$
- Hereinziehen der Negation: also aus $\neg(\alpha\vee\beta)$ wird $(\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)$ und aus $\neg(\alpha\wedge\beta)$ wird $(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$
- Ersetzen von $\neg(\neg\alpha)$ durch α
- Anwenden des Distributivgesetzes
  - Bsp.: $A\vee(B\wedge C)$ wird durch $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ ersetzt
  - $A\wedge(B\vee C)$ wird durch $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ ersetzt
- Ausnutzen der Assoziativgesetze durch Weglassen der Klammern in $A\wedge(B\wedge C)$, $A\vee(B\vee C)$, $(A\wedge B)\wedge C$, $(A\vee B)\vee C$

Kann man keine dieser Operation mehr anwenden, so ist die Aussage $\wedge$-vereinfacht.

Bsp.:

- $A_1\vee(A_2\wedge(\neg A_3))\Rightarrow(A_1\vee A_2)\wedge(A_1\vee(\neg A_3))$ $\wedge$-vereinfacht
- $A_1\wedge(A_2\vee(\neg A_3\wedge A_4))\Rightarrow A_1\wedge((A_2\vee(\neg A_3)\wedge(A_2\vee A_4))\Rightarrow A_1\wedge(A_2\vee(\neg A_3)\wedge(A_2\vee A_4)$

Eine $\wedge$-vereinfachte Aussage heißt $\wedge$-kanonisch, wenn:

1. keine Konstanten vorkommen außer den Aussagen w bzw. f.
2. In keinem der $\vee$-Terme T gleichzeitig mit einer Basisaussage T ohne Negation vorkommt

Zu jeder Aussage existiert eine logische äquivalente $\wedge$-kanonische Aussage. Dies erhält man aus $\wedge$-vereinfachten Aussagen durch:

1. Ersetzen aller $\vee$-Terme in denen A und $\neg$A vorkommet durch w
2. Weglassen aller f in $\vee$-Termen (außer in f selbst)
3. Ersetzen aller Terme $\alpha\wedge w\wedge\beta$ durch Weglassen
4. Ersetzen aller $\vee$-Terme in denen ein w vorkommt durch w
5. Ersetzen von Termen $\alpha\wedge f\wedge\beta$ durch f

Eine Aussage ist $\wedge$-kanonisch, wenn keine dieser Ersetzungen mehr möglich ist.

Syllogismus

Bsp.:

Alle Menschen sind sterblich, Cäsar ist ein Mensch, also ist Cäsar sterblich.

$(M\to S)\wedge(C\to M)\to(C\to S)\Rightarrow\neg((\neg M\vee S)\wedge(\neg C\vee M))\vee(\neg C\vee S)\Rightarrow$

$\neg(\neg M\vee S)\vee\neg(\neg C\vee M)\vee(\neg C\vee S)\Rightarrow(M\wedge\neg S)\vee(C\wedge\neg M)\vee(\neg C\vee S)$ $\Rightarrow$ Distributivgesetz

$w\wedge w\wedge w\cong w$

Modus Ponens:

$(A\wedge(A\to B))\to B$ ist allgemeingültig

Beweis:

$\neg(A\wedge(A\to B))\vee B$

$\neg(A\wedge(\neg A\vee B))\vee B$

$(\neg A\vee\neg(\neg A\vee B))\vee B$

$(\neg A\vee(A\wedge\neg B))\vee B$

$((\neg A\vee A)\wedge(\neg A\vee\neg B))\vee B$

$((\neg A\vee A)\vee B)\wedge((\neg A\vee\neg B)\vee B)$

$(\neg A\vee A\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee B)\Rightarrow(B\vee w)\wedge(\neg A\vee w)\cong w\wedge w\cong w$

Indirekter Beweis:

Satz: T ist wahr!

Beweis: Wir zeigen die Annahme, dass $\neg T$ führt zu einem Unsinn, also ist T wahr.

$(\neg T\to f)\cong w$

also $(\neg T\to f)\leftrightarrow w$ dies ist allgemeingültig

Hypothetischer Syllogismus

$(p\to r)\to(q\to r)\to((p\vee q)\to r))$

Bemerkung:

Eine Aussage ist genau dann allgemeingültig, wenn ihre $\wedge$-kanonische Form gleich ist.
Algorithmus zum Test von Allgemeingültigkeit.

Bsp.:

Abtrennungsregel

$((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

Erinnerung: $A\to B\cong\neg A\vee B$

$\neg((p\to q)\wedge(q\to r))\vee(p\to r)$

$\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$

$(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$

$(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r)$

$(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r)$

$((p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)\wedge\underbrace{(\neg q\vee q)}_{\text{wahr}}\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee(\neg p\vee r)$

$((p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee(\neg p\vee r)$

$(p\vee q\vee\neg p\vee r)\wedge(p\vee\neg r\vee\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee\neg p\vee r)\cong w\wedge w\wedge w\cong w$

Andere Logik: Deduktive Logik

Regeln der deduktiven Logik

1. $p\rightarrow\neg\neg p$
2. $\neg\neg p\rightarrow p$
3. $p\rightarrow(q\rightarrow p)$
4. $((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$
5. $(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$
6. $(p\wedge q)\rightarrow p$
7. $(p\wedge q)\rightarrow q$
8. $(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow p\rightarrow q\wedge r))$
9. $p\rightarrow(p\vee q)$
10. $q\rightarrow(p\vee q)$
11. $(p\rightarrow r)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\vee q)\rightarrow r)$
12. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow q)$
13. $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)$
14. $(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow p)\rightarrow(p\leftrightarrow q))$
15. $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

Ableitbar: Logische Ableitbarkeit

a) Jede Regel ist ableitbar
b) Sind A und $A\rightarrow B$ ableitbar, dann ist auch B ableitbar
c) Ist A ableitbar und entsteht B dadurch, dass eine Aussagenvariable überall in A durch dieselbe Konstante ersetzt wird, dann ist auch B ableitbar

Nur diese Regeln kommen vor.

Mathematischer Satz:

Theorem 3A: Unter der Annahme von A gilt B

Beweis: $A\rightarrow B$ ist ableitbar

Satz 339:

(Satz von der semantischen Vollständigkeit der Aussagenlogik)

Eine Aussage ist genau dann logisch ableitbar, wenn sie allgemeingültig ist.

Noch mal Mengenalgebra:

Syntax Relation $\in$ zwischen x, M, …

$\downarrow$ Elemente $\downarrow$ Mengen

Basisaussagenvariable

$x\in M$

$a\in B$

$M_1=M_2$	$x\in M_1\leftrightarrow x\in M_2$
$M_1\subset M_2$	$x\in M_1\rightarrow x\in M_2$
$x\in M_1\cap M_2$	$x\in M_1\wedge x\in M_2$
$x\in M_1\cup M_2$	$x\in M_1\vee x\in M_2$
$x\notin M_1$	$\neg x\in M_1$
$x\in M_1\backslash M_2$	$x\in M_1\wedge x\notin M_2$
$x\in\emptyset$ – f	

Bsp.:
$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$

Ersetzung
$x \in (M_1 \cup (M_1 \cap M_2) \leftrightarrow x \in M_1$
$x \in M_1 \vee x \in (M_2 \cap M_1) \leftrightarrow x \in M_1$
$x \in M_1 \vee (x \in M_2 \wedge x \in M_1) \leftrightarrow x \in M_1$

Beh.: $x \in M_1 \vee (x \in M_2 \wedge x \in M_1) \leftrightarrow x \in M_1$ ist allgemeingültig

Doppelpfeil ersetzen usw. $A \leftrightarrow B \cong (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Sei M eine Menge mit 15 Elementen. Wie viel verschiedene Teilmengen von M gibt es? 2^{15}

Bsp.:
Im Hörsaal gibt es 380 Studenten. Wie viel Möglichkeiten gibt es, daraus eine Fußballmannschaft zu bilden? $\dfrac{380!}{11! * 369!}$

n=0	M={}	Menge der Teilmengen (TM) = { {} }	Anzahl=1=2^0
n=1	M={1}	Menge der TM = { {}, {1} }	Anzahl=2=2^1
n=2	M={1,2}	Menge der TM = { {}, {1}, {2}, {1,2} }	Anzahl=4=2^2
n=3	M={1,2,3}	Menge der TM = {{},{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3}{1,2,3}}	Anzahl=8=2^3

P(M) = die Menge der TM von M (Potenzmenge von M, andere Schreibweise 2^M)

M habe n-Elemente. Die Zahl der Elemente von P(M) bezeichnen wir mit $\alpha(M)$

Wenn M={}, dann $\alpha(M)=1$ (Induktionsanfang)
Wenn M≠{}, dann nehmen wir $a \in M$ weg

$\hat{M} = M \setminus \{a\}$ $\quad \alpha(\hat{M}) = ?$

Gesucht ist eine Beziehung zwischen $\alpha(\hat{M})$ und $\alpha(M)$ (Schluss von n auf n+1)

$$\underbrace{P(M)} = \underbrace{P(\hat{M})} \dot\cup \underbrace{\{A \cup \{a\} \mid A \in P(\hat{M})\}}$$

$\alpha(M) = \text{Anzahl}\,\alpha(\hat{M})\ \text{Anzahl}\,\alpha(\hat{M})$

$\alpha(M) = 2\alpha(\hat{M})$

M Menge, |M|:= Anzahl der Elemente in M
Frage: Wie viel k-elementige Teilmengen in M gibt es?
Wenn |M|=n, dann bezeichnen wir mit $\psi(n,k)$, die Anzahl der k-elementigen Teilmenge.

Def.:
Eine k-elementige Teilmenge von M bezeichnet man als Kombination von M zu k Elementen

Einfach:

$\psi(n,k)=0$ für $k>n \wedge k<0$

$\psi(n,n)=1$

$\psi(n,0)=1$

$P_k(M)=\{A\subset M \mid |A|=k\}$ Fixiere ein Element $a\in M$

Setze $P_k(M)$ zusammen aus TM, die a enthalten und dann die a nicht enthalten.

$$P_k(M)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{enthalten a nicht}}}{A\subset M\setminus\{a\}} \mid |A|=k\}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{disjunkte Vereinigung}}}{\dot\cup}\{B\dot\cup\{a\} \mid \underset{\substack{\uparrow\\ \text{enthalten a}}}{B\subset M\setminus\{a\}},|B|=k-1\}$$

$|P_k(M)|=|\{A\subset M\setminus\{a\} \mid |A|=k\}|+|\{B\cup\{a\} \mid B\subset M\setminus\{a\},|B|=k-1\}|$

$\psi(n,k)=\psi(n-1,k)+\psi(n-1,k-1)$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \psi(0,0) & & & & & & 1 & & \\
 & \psi(1,0) & & \psi(1,1) & & & & 1 & & 1 & \\
\psi(2,0) & & \psi(2,1) & & \psi(2,2) & & 1 & & 2 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{n}{k}=\begin{cases} 0 & k>n \\ 0 & k<0 \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \end{cases}$$

Beh.:

$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ Wie beweist man das?

Zwischenspiel: „Vollständige Induktion“

A(n) Folge von Aussagen mit $A(0)=w$ und $A(n)\to A(n+1)$

Beh.: Alle A(n) sind wahr

Beweis: Annahme des Gegenteils, d. h. es gibt min. ein n_0 mit $A(n_0)=f$.

Betrachte: $T:=\{n \mid A(n)=f\}\subseteq N_0$

$T\neq\varnothing$, da $n_0\in T$. Wir nehmen das kleinste Element $\overline{n_0}>0$ aus T.

Dann gilt $A(\overline{n_0})=f$, $A(\overline{n_0}-1)=w$

ABER: $A(n)\to A(n+1)$ zeigt, das dies falsch ist.

Beh.:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}$$ (mit k und (n-k) erweitern)

$$=\frac{(n-1)!k}{(n-k)!(k-1)!k}+\frac{(n-1)!(n-k)}{(n-1-k)!k!(n-k)}=\frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}+\frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!}=\frac{(n-1)![k+n-k]}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$$ Ende

Zusammenfassung:

Wir wissen: 1) $\psi(n,k)=0$ für $k>n$ und $k<0$

2) $\psi(n,k)=\psi(n,n)=1$

3) $\psi(n,k)=\psi(n-1,k)+\psi(n-1,k-1)$

Für jedes n gilt $\psi(n,k)=\binom{n}{k}$ für $\forall k$ (Aussage A(n))

Beweis durch vollständige Induktion

1. Schritt (Induktionsanfang)

A(0) ist w (wie wir am Anfang festgestellt haben)

2. Schritt (Induktionsschritt)

Zeige $A(n)\rightarrow A(n+1)$. Es ist also zu zeigen, wenn A(n)=w, dann auch A(n+1)=w.

Annahme: A(n)=w, d. h. $\psi(n,k)+\psi(n,k-1)=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}=\psi(n+1,k)$

Also ist auch A(n+1)=w

1) + 2) $\Rightarrow$ A(n)=w $\forall n$

M Menge mit |M|=49 Wie viel 6-elementige Teilmengen gibt es von M?

Antwort=$\binom{49}{6}$=13.983.816

|M|=49=1,2,…,49

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem zufällig ausgewählten Tipp den richtigen nächsten Sonntag zu wählen?

W=Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

$W=\frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}}$ (Grundannahme der komb. Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 10 von 32 Karten 4 Asse zu bekommen?

M=Menge der 32 Karten

$|A|=10$, $A\subset M$ Wie viele A gibt es $\mu=\{A\subset M \mid |A|=10\}$

$|\mu|=\binom{32}{10}$=Anzahl der möglichen Fälle

günstige Fälle, das sind die A, die 4 Asse enthalten

$\gamma=\{B\cup\{4\text{ Asse}\} \mid B\subset M\setminus\{4\text{ Asse}\},|B|=6\}=\binom{28}{6}$

$$W=\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}}=\frac{195}{7238}$$

Vollständige Induktion

Wie groß ist $1^2+2^2+3^2+\dots+N^2=\sum_{n=1}^{N} n^2$

<u>Beh.:</u>

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \qquad \text{(Aussage A(n))}$$

<u>Beweis:</u>

Wir untersuchen A(1) auf Wahrheit ⇒ A(1) ist wahr (I. A)

A(n) sei wahr zu zeigen. Dann ist auch A(n+1)=w

$$\sum_{n=1}^{N+1} n^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \qquad \Rightarrow \text{wegen Annahme A(n)=w}$$

$$= \frac{(N+1)(N(2N+1)+6(N+1))}{6} = \frac{(N+1)(2N^2+N+6N+6)}{6} = \frac{(N+1)(N+2)(2(N+1)+1)}{6}$$

$$= \sum_{n=1}^{N+1} n^2 \text{ also ist A(n+1) richtig}$$

<u>Beh.:</u>

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} \qquad \text{(Aussage A(N))}$$

I) N=0 links=1 rechts=$\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

N=1 links=a+b rechts=$\binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b$

II) Annahme: A(N) sei wahr

$$(a+b)^{N+1} = (a+b)^N (a+b) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} (a+b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{k+1} b^{N-k}}_{\text{1. Term}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N+1-k}}_{\text{2. Term}}$$

jetzt k durch j-1 ersetzten (1. Term)

$$\sum_{j=1}^{N+1} \binom{N}{j-1} a^j b^{(N+1-j)} = \sum_{j=1}^{N+1} \binom{N}{j-1} a^j b^{(N+1)-j}$$

jetzt j durch k ersetzten (1. Term)

$$\sum_{k=0}^{N+1} \binom{N}{k-1} a^k b^{(N+1)-k}$$

$$\text{2. Term} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{(N+1)-k} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N}{k} a^k b^{(N+1)-k}$$

$$\text{1. Term + 2. Term} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} a^k b^{(N+1)-k} \qquad \text{Erinnerung: } \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} = \binom{N+1}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} a^k b^{(N+1)-k}$$

wenn also Aussage A(N)=w

$$\boxed{(a+b)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} a^k b^{(N+1)-k}} \qquad \text{(Aussage A(N+1) ist also wahr)}$$

Fazit: alle A(N) ∀N sind wahr

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Sigma=1=2^0 \\ \Sigma=2=2^1 \\ \Sigma=4=2^2 \end{array}$$

$$\binom{N}{0}+\binom{N}{1}+\binom{N}{2}+\ldots+\binom{N}{N}=(1+1)^N\{2^N\}=\sum_{k=0}^{N}1^k 1^{N-k}=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}$$

N=p sei Primzahl

$$\binom{p}{k}=\frac{p!}{(p-k)!k!}=\frac{1*2*3*\ldots*(p-1)*p}{1*2*3*\ldots*(p-k)*1*2*\ldots*k} \quad \text{für } 0<k<p$$

__Erkenntnis:__ p=Primzahl, dann ist $\binom{p}{k}$ für $0<k<p$ durch p teilbar

a, b ganze Zahlen
Wenn a und b bezüglich der Teilung durch n den gleichen Rest haben, dann schreiben wir $a\equiv b \bmod n$

$7\equiv 1 \bmod 3$ $\qquad$ $12\equiv 0 \bmod 2$ $\qquad$ $a\equiv b \bmod n \Leftrightarrow n|a-b$

a, b seien ganze Zahlen, p sei Primzahl

$$(a+b)^p=\binom{p}{0}a^p b^0+\underbrace{\binom{p}{1}a^{p-1}b^1\binom{p}{2}a^{p-2}b^2+\ldots+\binom{p}{p-1}a^1 b^{p-1}}_{\text{alles durch p teilbar}}+b^p$$

$(a+b)^p\equiv a^p+b^p \bmod p$
$a^p=((a-1)+1)^p\equiv(a-1)^p+1^p \bmod p=(a-2)^p+1^p+1^p \bmod$
$=(a-k)^p+k \bmod p$
$=(a-a)^p+a \bmod p$

$\boxed{a^p\equiv a \bmod p}$

M und A seien Mengen $|M|=n$ $\quad$ $|A|=k$

__Frage:__ Wie viele verschiedene Funktionen $f: M\to A$ gibt es?
Anzahl=$\psi(n,k)$
Wir betrachten ein festes $a\in M$ und betrachten die Funktion $f_1: M\setminus\{a\}\to A$ dann gibt es $\psi(n-1,k)$ Stück.

Eine Funktion $f_1: M\setminus\{a\}\to A$ kann ich zu einer Funktion auf M fortsetzen indem ich M auf a einen beliebigen Wert aus A zuweise (Es gibt also k verschiedenen Fortsetzungen). Deshalb: $\psi(n,k)= \psi(n-1,k)=k^2(n-2,k)=k^2\psi(0,k)=k^n$

Es gibt $|A|^{|M|}$ verschiedene Funktionen von $M\to A$.

Auf wie viel verschiedene Weisen kann man ein 8-Team aus 93 Leuten zusammenstellen? Leute=Menge L

$\binom{93}{8}=|\{T|T<L\wedge|T|=8\}$ $\qquad$ $|L|=93$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem zufälligen Tipp a) genau b) min. 5 Richtige im Lotto zu haben?

a) günstige Fälle $F_1=\{B\cup\{a\} \mid |B|=5, B\subset \text{Richtige Zahlen}, a\in M\setminus\mu\}$ μ=Richtige Zahlen
$= \{B\cup\{a\} \mid B\subset\mu, |B|=5, a\in M\setminus\mu\}$

wie viele gibt es?

$F_1=\binom{6}{5}*43$ $\quad\quad W=\dfrac{\binom{6}{5}*43}{\binom{49}{6}}$

Teilbarkeit in Z und einfache algebraische Begriffe
Notation: $a|b$ „a teilt b" (unter der Annahme $a, b\in Z$)

<u>Bsp.:</u>
$3|12$ $\quad 13\nmid 27$ $\quad 11|22$
Eine Zahl heißt Primzahl, wenn sie nur von 1 und sich selbst geteilt wird.

<u>Bem.:</u>
1) $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$
2) $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|b-c, a|b+c, a|n_1b+n_2c$ $\quad\quad n_1, n_2\in N$

<u>Satz:</u>
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

<u>Beweis:</u>
Wir nehmen das Gegenteil an, d. h. wir nehmen an, es gibt nur endlich viele Primzahlen: $p_1, p_2, \ldots, p_N$ (dies seien alle)

<u>Betrachte:</u>
$p_1, p_2, \ldots, p_N, p_{N+1}$
Die Zahl ist durch kein $p_1, p_2, \ldots, p_N$ teilbar, also entweder Primzahl oder teilbar durch eine PZ, die in der Aufzählung nicht vorkommt.

<u>Bsp.:</u>
Primzahlen sind 2, 3, 7, 11, 427!+1…

<u>Restklassen:</u>
Wir sagen $a\equiv b \bmod n$ $(a, b\in Z)$, wenn $n|(a-b)$. Wenn n nicht variiert, dann lassen wir das mod n der Einfachheit halber weg.

<u>Bem.:</u>
$a\equiv a$, $\quad a\equiv b\wedge b\equiv c\Rightarrow a\equiv c$ $\quad\quad$ (Also ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation. Die Welt ist voller Äquivalentrelationen).

Eine vielleicht nützliche Äquivalenzrelation ist (NxN)x(NxN)
$\gamma=\{((a,b),(c,d)) \mid a,b,c,d\in N \text{ und } a*b=b*c\}$

Neue Schreibweise:

statt $((a,b),(c,d))\in\gamma$ schreiben wir $(a,b)\sim(c,d)$ (offensichtlich $(a,b)\sim(a,b)$)
$(a,b)\sim(b,c)\wedge(b,c)\sim(d,e)\Rightarrow(a,b)\sim(d,e)$

Wir kennen noch keine Bruchrechnung und wählen deshalb für (a,b) eine neue Schreibweise
$\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d}$, wenn $a*d=b*c$
statt (a,b) schreiben wir
a ~~x~~ b~c ~~x~~ d, wenn gilt a+b=b+c

Ist ~ eine Äquivalenzrelation in M, dann heißt $\{b|b\sim a\}$ die Äquivalenzklasse von a.

Klassenbildung:

Bsp.: (alles in Z, n fest (n=5))
$a\sim b$ stehe für $a\equiv b \bmod n$, dann schreibt man für die Äquivalenzklasse von $a=[a]\subset T$ Teilmenge von Z
$[Z]=\{2,7,-3,12,-8,\ldots\}$ unendliche Menge
$[2]=\{2+m*5|m\in Z\}$ n=5
$[a]=\{a+m*5|m\in Z\}$

Rechnen mit Klassen:

Einführung einer Arithmetik
[a]+[b]=[a+b]
[a]*[b]=[a*b]
[2]+[3]=[7+8]=[32+503]

Klassenbildung war strukturverträglich mit +, * Kongruenzklassen

Betrachte die Äquivalenzklassen mod N
$[a]=\{a+k*N|k\in Z\}$ heißt Restklasse bezüglich der Division durch N

[a]+[b]=[a+b] „Die Problematik dieser Definition haben wir zur Beruhigung unseres mathematischen Gewissens abgearbeitet.
[a]*[b]=[a*b]

Nullelement

[a]+Null=[a] $\forall$a Gibt es ein Null=[0]
[a]*Eins=[a] $\forall$a Ja, Eins=[1]

Gibt es ein Inverses?

$[a]*[a]^{-1}=[1]$???
Das hängt von N ab.

Bsp.:

N=15 [a]=[3] [b]=[5]
[a]*[b]=[0] keine Inverse

N=p Primzahl (z. B. N=5)
a=1 $[a]^{-1}=[1]$
a=2 $[a]^{-1}=[3]=[2^3]$, denn $[3]*[2]=[1]$
a=3 $[a]^{-1}=[2]=[3^3]$, denn $[2]*[3]=[1]$
a=4 $[a]^{-1}=[4]=[4^3]$, denn $[4]*[4]=[1]$

Das liegt an N=Primzahl.

Erinnerung: wenn $a\in N$, p Primzahl$\Rightarrow p|a^p \triangleq a^p\equiv a \bmod p$
wenn $a\in N$, p Primzahl und p mod a teilerfremd$\Rightarrow a^{p-1} \bmod p$

Satz:
Ist p Primzahl [a] eine Restklasse bez. p, welche $\neq [0]$, dann hat [a] ein Inverses, nämlich $[a^{p-2}]$

Beweis:
$[a]*[a^{p-2}]=[a*a^{p-2}]=[a^{p-1}]=[1]$

Bsp.:
p=7
$[1]^{-1}=[1]$
$[2]^{-1}=[2^5]=[32]=[4]$ $[4*2]=[1]$
$[3]^{-1}=[3^5]=[243]=[5]$ $[5*3]=[1]$
$[4]^{-1}=[4^5]=[32]=[2]$ $[2*4]=[1]$

Algebraische Begriffe (Strukturbegriffe)
1) Äquivalenzrelation
2) Körper: Struktur, in der man mit +, * so wie üblich rechnen kann, der außerdem eine Division erlaubt.
3) Ring: - dasselbe -, ohne Division

Restklassenring modulo n, Notation: Z/n
Besteht aus den durch die Reste gegebenen Äquivalenzklassen $[a]=\{a+mn|m\in Z\}$.
Hinfort schreibe ich für [a] einfach a und benutze das = für die Relation $\equiv$ mod n

n=5 Wir rechnen in der Restklasse
3*2=1 4*3=2

Schule: Restklassen bzgl. 5

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikationstabelle

Zu jedem Element, außer 0, existiert ein Inverses bez. *

$a\neq 0\Rightarrow a^{-1}=a^{p-2}$ falls p Primzahl n=10

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	hat Inverses
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	hat kein Inverses
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	hat Inverses

Wenn $n=p_1*p_2$, p_1,p_2 verschiedene Primzahlen,
dann hat jede Zahl teilerfremd zu n ein Inverses: a teilerfremd zu n $a^{-1}=a^{(p1-1)(p2-2)-1}$

Der größte gemeinsame Teiler ggT(n,m), gcd(n,m)

Berechnung am Bsp.:

gcd(45,30) Euklidischer Algorithmus
45=1*30+15
30=2*15+0

gcd(270,64)
270=4*64+14
64=4*14+8
14=1*8+6
8=1*6+2
6=3*2+0

gcd(7,9)
9=1*7+2
7=3*2+1
2=2*1+0

gcd(270,64)=a

Wir bezeichnen für r>=0 mit $[r]=\max\{n\in N_0 | n<r\}$ ganzzahliger Anteil von r floor(r)
Nehme r

$$r=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{[r*10^{k+1}]-10[r*10^k]}{10^{k+1}}$$

Bsp.: $\pi=r$ r=3,1415…

$[r*10^{-1}]=0$ k=-1=3 $\frac{[r*10^{k+1}]-10[r*10^k]}{10^{k+1}}$

$[r*10^0]=3$ k=0=1/10
$[r*10^1]=31$ k=1=4/100
$[r*10^2]=314$ k=2=1/1000
$[r*10^3]=3141$ $\Rightarrow$ Zahl π

allgemein r>0, b>1 nehmen wir eine Basis, dann gilt $r=\sum_{k\in Z}\frac{\overbrace{[r*b^{k+1}]-b[r*b^k]}^{Z_{k+1}}}{b^{k+1}}$

Z_k ist die k-te Stelle der b-Entwicklung von r

b=2$\Rightarrow$Binärstellen, b=16$\Rightarrow$Hexadezimalstellen …

Binäre Operation auf Menge M

Abbildung $\circledast$ von der Art, dass $a\circledast b\in M$,
wenn $a, b\in M$

Bsp.:

+ in Z, * in R, $\wedge$ in Aussagen, $\vee$ in Aussagen, $\Rightarrow$ in Aussagen, + in Restklassen, * in Restklassen, * in Matrizen

kommutativ : $a \circledast b = b \circledast a \qquad \forall a,b \in M$

assoziativ: $(a \circledast b) \circledast c = a \circledast (b \circledast c) \quad \forall a,b \in M$

M sei mit einer binären Operation $\circledast$ ausgestattet

$$\left.\begin{aligned} a \circledast b &= b \\ b \circledast a &= b \end{aligned}\right\} \forall b \in M$$

Bei binären Operationen für die wir das +-Zeichen verwenden, nennen wir die Einselemente 0-Element

		<u>Einselement</u>
M=R	$\circledast = +$	0
Aussage	$\circledast = \vee$	false
Aussage	$\circledast = \wedge$	true

Gesucht: gcd(r_0, r_1) Bsp.: $r_0 = 120, \quad r_1 = 25$

120=4*25+20 [1,0][0,1]

25=1*20+5 [0,1]1-4*0,0-4*1]

20=4*5+0 [1,-4][0-1*1,1-1*(-4)] $\Rightarrow$ [1,5]

5=gcd(120,25)=-1*120+5*25

$r_0 = q_0 * r_1 + r_2 \qquad [A_0, B_0][a_0, b_0] \quad [A_0 = 1, B_0 = 0]$

$r_1 = q_1 * r_2 + r_3 \qquad [A_1, B_1][a_1, b_1]$

$r_2 = q_2 * r_3 + r_4$

$\ldots$

$r_k = q_k * r_{k+1} + r_{k+2} \quad [A_k, B_k][a_k, b_k]$, so dass $a_k * r_0 + b_k * r_1 = r_{k+1}$, $A_k * r_0 + B_k * r_1 = r_k$

$\ldots$

$r_N = q_N * r_{N+1} + 0$

Rekursionsformel für a_k, b_k, A_k, B_k

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= -r_k * q_{k-1} + r_{k-1} \\ &= -q_{k-1} * (a_{k-1} * r_0 + b_{k-1} * r_1) + (A_{k-1} * r_0 + B_{k-1} * r_1) \\ &= r_0 * (A_{k-1} - a_{k-1} * q_{k-1}) + r_1 (B_{k-1} - b_{k-1} * q_{k-1}) \\ &= r_0 * a_k + r_1 * b_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a_k = A_{k-1} - q_{k-1} * a_{k-1}, \qquad b_k = B_{k-1} - q_{k-1} * b_{k-1} \\ &A_k = a_{k-1}, \qquad\qquad\qquad\quad B_k = b_{k-1} \end{aligned}}$$

$r_0 = q_0 * r_1 + r_2$ $\quad$ $[1,0][0,1]$

$r_1 = q_1 * r_2 + r_3$ $\quad$ $[0,1][a_1 = 1 - q_0 * 0, b_1 = 0 - q_0 * b_1]$

$r_2 = q_2 * r_3 + r_4$ $\quad$ $[a_1 = 1 - q_0 * 0, b_1 = 0 - q_0 * b_1][A_1 - q_1 * a_1, B_1 - q_1 * b_1]$

…

$r_k = q_k * r_{k+1} + r_{k+2}$ $\quad$ $[A_k = a_{k-1}, B_k = b_{k-1}][a_k = A_{k-1} - q_{k-1} * a_{k-1}, b_k = B_{k-1} - q_{k-1} * b_{k-1}$

…

$r_N = q_N * r_{N+1} + 0$ $\quad$ $[\ ][a_N, b_N]$

Ergebnis: $\gcd(r_0, r_1) = r_{N+1}$

$a_N * r_0 + b_N * r_1 = \gcd(r_0, r_1)$

<u>Berechne</u>: 9^{-1} mod 17=? $r_0 = 17, \quad r_1 = 9$

17=1*9+8 [1,0][0,1]

9=1*8+1 [0,1][1-1*0,0-1*1]

8=8*1+0 [1,-1][0-1*1,1-1*(-1)] $\Rightarrow$ [-1,2]

1=gcd(17,9)=-1*17+2*9

2*9=1+Vielfaches (17)

2*9=1 mod 17

173^{-1} mod 438=?

438=2*173+92 [1,0][0,1]

173=1*92+81 [0,1][1,-2]

92=1*81+11 [1,-2][-1,3]

81=7*11+4 [-1,3][2,-5]

11=2*4+3 [2,-5][-15,38]

4=1*3+1 [-15,38][32,-81]

3=3*1+0 [32,-81][-47,119]

gcd(438,173)=1=-47*438+119*173 $\Rightarrow$ $(173)^{-1}$ mod 438=119

1) Seien R, S zwei ganze Zahlen, dann existiert R^{-1} mod S genau dann, wenn gcd(R,S)=1
2) Die Größe R^{-1} mod S erhält man dann auf folgende Weise:
   Finde mit igcdex (erweiterter Euklidischer Algorithmus) die Gleichung a*R+b*S=1=gcd(R,S), dann $a=R^{-1}$ mod S

<u>Die RSA-Verschlüsselung</u>

1. Ziel: Man möchte durch Bekanntgabe eine Verschlüsselungsmethode, zu der man nur selbst die Entschlüsselung durchführen kann, dass JEDER einem eine Botschaft schicken kann, die man nur selbst lesen kann.
2. Ziel: Man möchte Botschaften so Verschlüsseln dass jeder sie lesen kann, aber sonst niemand sie hätte schreiben können.

Verfahren:

Man wählt zwei große Primzahlen p,q, so dass die Zerlegung des Produktes N=pq in seine Primteiler selbst für schnelle Rechner nicht durchführbar ist.

Sie wählen sich eine Zahl e zwischen 1<e [teilerfremd zu (p-1)(q-1)]<(p-1)(q-1), dann geben sie N und e bekannt (öfftl. Schlüssel)

Wir rechnen aus $d=e^{-1} \bmod (p-1)(q-1)$
Das Zahlenpaar d und $(p-1)(q-1)$ heißt unser privater Schlüssel

RSA Wähle P-Zahlen p und q, Setze $N=pq$
Wähle e teilerfremd zu $(p-1)(q-1)$ und $1<e<(p-1)(q-1)$
Öffentlicher Schlüssel e, N
Bilde: $d=e^{-1} \bmod (p-1)(q-1)$
Privater Schlüssel: d

Bemerkung zum kleinen Fermat

Wir wissen $m^p=m \bmod p$ p=Primzahl
Also $m^{sp}=m^s \bmod p$ $(m^{sp}-m^s)=m^s(m^{s(p-1)}-1)=0 \bmod p$

1. Fall

m^s ist durch p teilbar $\Rightarrow$ m durch p teilbar
$\Rightarrow m(m^{s(p-1)}-1)$ durch p teilbar
$\Rightarrow \boxed{m^{s(p-1)+1}=m \bmod p}$

2. Fall

$m^{s(p-1)}-1=0 \bmod p$
$\Rightarrow \boxed{m^{s(p-1)+1}=m \bmod p}$

Betrachte p, q Primzahlen
$m^{k(p-1)(q-1)+1}=m \bmod pq$

Wir wissen:
$m^{k(p-1)(q-1)+1}=m \bmod p$
$m^{k(p-1)(q-1)+1}=m \bmod q$

Verschlüsselung

n eine Zahl zwischen 1 und N wird folgendermaßen verschlüsselt.
$n \rightarrow \text{encrypt}(n):=n^e \bmod N$ (dabei brauche ich den öffentlichen Schlüssel)

Entschlüsselung:

n eine Zahl zwischen 1 und N
$n \rightarrow \text{decrypt}(\text{encrypt}(n))=n$

Beweis :

$(n^e)^d = n^{ed}$, weil $ed=1+k(p-1)(q-1)$, $n^{ed}=n^{1+k(p-1)(q-1)}=\bmod N$
$e*d=1 \bmod (p-1)(q-1)$ d. h. $(ed-1)$=Vielfaches von $(p-1)(q-1)$ $N=pq$

Wie schwierig ist es das Vielfaches durch ausprobieren (sehr naive Methode) zu knacken?

a) Raten der Faktorisierung von N
b) durch Raten von d
   - p, q seien Primzahlen mit 20-30 Stellen
   - p, q habe 50 Stellen

Wie viele Zahlen gibt es zwischen 10^{20} und 10^{30}?

Primzahlteilung: Es gibt unterhalb von x „ungefähr“

$\boxed{\pi(x) \cong \frac{x}{\ln(x)}}$ Primzahlen

$$\frac{\pi(x) * \ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

Genauer: $\pi(10^{30}) \cong \frac{10^{30}}{\ln(10^{30})} = \frac{10^{30}}{30 * \ln(10)} > 1$

$\pi(10^{20}) \leq 10^{18}$

Antwort:

Ich muss 10^{27} Zahlen ausprobieren.
Alter der Erde in Sekunden = $1{,}5*10^{11}$
Raten von d: Da muss ich 10^{49} Zahlen durchgehen
Vergleich: Ausdehnung des Universums in mm 10^{27}

Bsp.:

p=17, q=23 N=17*23=391 öffentlicher Schlüssel e=273

Jemand nutzt meinen öffentlichen Schlüssel und sendet mir eine Botschaft, sagen wir 224
Entschlüssele diese Botschaft

1. Schritt

d = Inverse e mod (p-1)(q-1)
mod 352
geht mit dem EEA: d=49

2. Schritt

Entschlüsselung 224^{49} mod N $\rightarrow$ 343 (entschlüsselte Nachricht)
Probe: Verschlüsselung 343^{273} mod 391 $\rightarrow$ 224

Motivation für Repeated Squaring (Z)

1025^{11}=?

1. Schritt 11 in Binärdarstellung
$11 = 2^3+2^1+2^0=1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0$=[1,0,1,1]
Was stellt [1,1,1,0,0,1] dar?
$1*2^5+1*2^4+1*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0=32+16+8+1=57$

Berechnung von a^M a, M ganz

1. Schreibe M als Binärzahl [1,0,1,1,0,1]
2. Schreibe darunter die $[a^{32},a^{16},a^8,a^4,a^2,a^1]$
3. Nehme die a-Potenzen über denen eine 1 steht und bilde das Produkt

Bsp.: 3^{81} 81=[1,0,1,0,0,0,1]
[3,9,27,81,43046721,1853020188851841,3433683820292512484657849089281]
3^{81}=3*43046721*3433683820292512484657849089281]

Nochmal 3^{81} mod 11
81=[1010001]   [4,9,3,5,4,9,3]
3^{81} mod 11 = 4*3*3=3

RSA

Bsp.: 2 p=503   q=101   N=pq=50803
Öffentlicher Schlüssel 40001 teilerfremd zu 100*502 = (p-1)(q-1)
Ihr Freund sendet Ihnen als Botschaft 2334

Aufgabe 1

p=17, q=23   N=p*q=17*23=391 öffentlicher Schlüssel e=273
öffentlicher Schlüssel: e=273, N=391
privater Schlüssel: $d=e^{-1}$ mod 352→*(p-1)(q-1)=352 (geheim)*

Berechnung von d:
a*273+b*352=1=gcd(273,352)

Inverse a   Was machen wir, wenn a negativ ist?

a) Nichts, dann fallen wir auf die Nase!
b) 352+a ist ein Inverses (jetzt aber positiv)

Botschaft war: 224   hier brauchen wir einen positiven Rest
Entschlüsselung 224^d mod 391

Aufgabe 2

p=401, q=211, N=pq=84611, e=56003 (Ist das zulässig?)
Zulässig: gcd(e,(p-1)(q-1))=84000=1
öffentlicher Schlüssel: e=56003, N=84611
privat: $d=e^{-1}$
igcdex(56003,84000)=1, -37333, 24890 (gcd, Koeffizient von a, Koeffizient von b)
-37333*56003+24880*84000=1
$-37333=d=e^{-1}$

„Besseres Inverses“
84000-37333=46667
Entschlüsseln der Botschaft 12345 ergibt
12345^{46667} mod 84611

a) Binärzerlegung von 46667 – [1011011001001011]

Matrizen und Lineare Algebra

Kostensteigerung bei den Krankenkassen WiWo 1995

	AOK	*BKK*	*IKK*	*EAR*	*EAN*
Zahnersatz	11	10	12	5	9
Massagen	6	2	7	1	1
Vorsorge	11	24	13	6	23
Kuren	10	6	14	1	-1
Verwalt.	5	26	3	2	3

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.11 & 0.10 & 0.12 & 0.05 & 0.09 \\ 0.06 & 0.02 & 0.07 & 0.01 & 0.01 \\ 0.11 & 0.24 & 0.13 & 0.06 & 0.23 \\ 0.10 & 0.06 & 0.14 & 0.01 & -0.01 \\ 0.05 & 0.26 & 0.03 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} \rightarrow \text{5x5-Matrix (Zeilen x Spalten)}$$

Wie hoch waren die absoluten Steigerungen, d. h. ich suche eine neue Tabelle.

Absolute Steigerung	
a_1	Zahnersatz
a_2	Massagen
a_3	Vorsorge
a_4	Kuren
a_5	Verwalt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = M2 \qquad \text{5x1-Matrix}$$

Wir brauchen noch die Ausgaben des Vorjahres

Ausgaben 1994	
x_1	AOK
x_2	BKK
x_3	IKK
x_4	EAR
x_5	EAN

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = M3 \qquad \text{5x1-Matrix}$$

$0.11 * x_1 + 0.10 * x_2 + 0.12 * x_3 + 0.05 * x_4 + 0.09 * x_5 = a_1$ (Element von 1/2. Zeile & 1. Spalte

$0.06 * x_1 + 0.02 * x_2 + 0.07 * x_3 + 0.01 * x_4 + 0.01 * x_5 = a_2$ 1/2. Zeile von M1 x 1. Spalte von M3)

<u>Gleichungssystem</u>

Formal schreiben wir

M1 x M3 = M2

$$\begin{pmatrix} 0.11 & 0.10 & 0.12 & 0.05 & 0.09 \\ 0.06 & 0.02 & 0.07 & 0.01 & 0.01 \\ 0.11 & 0.24 & 0.13 & 0.06 & 0.23 \\ 0.10 & 0.06 & 0.14 & 0.01 & -0.01 \\ 0.05 & 0.26 & 0.03 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \qquad \text{Produkt von M1 x M3 = M2}$$

Wir rechnen damit aus dem x_i die a_k aus. Anderes Problem: Gegeben seien die a_1,...a_5, gesucht seien die $x_1, \ldots, x_5$.

Umkehrproblem: Lösen der Gleichungen

Übersetze das Gleichungssystem

$$2 * x_1 + 5 * x_2 + 7 * x_3 + 12 * x_4 + 8 * x_5 = 12$$

$$1 * x_1 + 5 * x_2 - 1 * x_3 - 5 * x_4 + 7 * x_5 = 21$$

$$2 * x_1 - 7 * x_2 + 4 * x_3 - 5 * x_4 + 21 * x_5 = 1$$

in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 12 & 18 \\ 1 & 5 & -1 & -5 & 7 \\ 2 & -7 & 4 & -5 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mxk-Matrix}$$

mxn-Matrix, m=3, n=5

nxk-Matrix k=1

<u>Erkenntnis:</u> Eine mxn-Matrix mal einer nxk-Matrix ergibt eine mxk-Matrix.
Produkt mxn-Matrix mal $\tilde{n}$ x k-Matrix mit $\tilde{n} \neq$ n ist nicht erklärt.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ geht nicht}$$

(2x4-Matrix – 3x2-Matrix)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 12 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \frac{a_{11} = 2*1+3*2+5*3+7*4}{a_{21} = 1*2+-2*1+5*12+1*18}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix} \text{(m Zeilen und n/k Spalten)}$$

$$c_{jr} = a_{j1}*b_{1r} + a_{j2}*b_{2r} + \cdots + a_{jn}*b_{nr} = \sum_{s=1}^{n} a_{jr}*b_{sr}$$

A*B=C
Die Anzahl der Zeilen von C = Anzahl der Zeilen von A.
Die Anzahl der Spalten von C = Anzahl der Spalten von B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

*Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d. h. A*B≠B*A*

<u>MuPAD</u> M=matrix([[],[], …,[]]) []←eine Zeile

Von den folgenden Kostenarten entfallen auf die Patienten in NRW, H, NS, B folgende Anteile

	Zahnersatz	*Massage*	*Vorsorge*	*Kuren*	*Verwaltung*
NRW	0.35	0.40	0.25	0.50	0.30
H	0.20	0.15	0.25	0.10	0.20
NS	0.15	0.15	0.30	0.10	0.20
B	0.08	0.10	0.30	0.05	0.10

Matrix M4

Was ist der Anteil der absoluten Kostensteigerung der auf die Patienten in NRW, H, NS, B entfällt?

$$0.35*a_1 + 0.40*a_2 + 0.25*a_3 + 0.50*a_4 + 0.30*a_5$$

absoluter Kostensteigerungsanteil	
k_1	NRW
k_2	H
k_3	NS
k_4	B

Matrix M5

M4*M2=M5
M4*(M1*M3)=M5

Wir rechnen aus die Regionale Aufschlüsselung der Kostensteigerung der einzelnen Kassen.

	AOK	*BKK*	*IKK*	*EAR*	*EAN*
NRW					
H					
NS					
B					

Matrix M6

M6=M4xM1
M5=M6xM3=(M4xM1)xM3
M4x(M1xM3)=(M3xM1)xM3

Die Matrizenmultiplikation ist ASSOZIATIV.

Bem.:
Seien A, B, c Matrizen, dann gilt (sofern die Produkte definiert sind)
(A*B)*C=A*(B*C)

Wir hatten $M1 * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$

Aufgabe war: Gegeben seien $a_1,...a_5$, gesucht seien die $x_1,\ldots,x_5$.

$$(M1)^{-1} * (M1 * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) = (M1)^{-1} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

mxn-Matrizen können mit nxk-Matrizen multipliziert werden
(mxn-Matrix)x(nxk-Matrix)=(mxk-Matrix)

Produkt ist assoziativ, im Allg. nicht kommutativ
$3x+4y+5z+2t=12$
$x - y + z + 0t = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Matrix 3'}$$

1) $x+y+z+t=1$
2) $x-y-z-z=2$

1') $4x+5y+6z+3t=13$
2') $2x-2y+0z-1t=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 1+4 & 1+5 & 1+2 \\ 1+1 & -1-1 & -1+1 & -1+0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

nur definiert: wenn Zeilen und Spaltenzahlen übereinstimmen

$$((M_{3'}+M_{5'})\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad M_{3'}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix} \qquad M_{3''}*\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation ist distributiv. Betrachte die nxn-Matrizen: Ist ein Ring.

Besondere Matrizen

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&4&5&6\\2&3&1&7\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&5&6\\2&3&1&7\\3&1&4&6\end{pmatrix}$$

$$I_n=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix} \text{ mit } a_{ik}=\left\{\frac{1 \text{ wenn } i=k}{0 \text{ sonst}}\right\} \text{ heißt Einsmatix.}$$

Es gilt nxk Matrizen A $\quad I_n * A = A$ und für alle j*n Matrizen B: $B*I_n = B$

3x+6y=a   Löse nach x und y auf
<u>4x+2y=b</u>
(3-12)x+0y=a-3b
9x=3b-a   x=-1/9a+1/3b
2y = b-4x = b+4/9a-4/3b = 4/9a-1/3b
x=-1/9a+1/3b   y=2/9a-1/6b

$$\begin{pmatrix}3&6\\4&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}/\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/\begin{pmatrix}3&6\\4&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}/\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3&6\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Sei A eine nxn-Matrix (also eine quadratische Matrix)
B heißt das Inverse von A, wenn gilt $A*B=I_n \quad B*A=I_n$
statt B schreiben wir dann $B=A^{-1}$

Sei A eine nxn-Matrix. Betrachte das Gleichungssystem

$$A*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\\vdots\\r_n\end{pmatrix} \quad \text{Löse dieses nach } x_1,\ldots,x_n$$

$$A^{-1}(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix})=A^{-1}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{Assoziativ}]{}(A^{-1}*A)*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\\vdots\\r_n\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}$$

Lösung, sofern A^{-1} existiert

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\0&0\end{pmatrix}$$

hat kein Inverses
Später sehen wir: A, B nxn-Matrizen mit $A*B=I_n \Rightarrow B=A^{-1}$

Weitere spezielle Matrizen

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \vdots \end{pmatrix}$ Spaltenmatix bzw. Spaltenvektor $\quad (a\ b\ c\ \cdots)$ Zeilenmatrix bzw. Zeilenvektor

$$(1\ 2\ 5\ 7) * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 0)$$

Vertauschung von Zeilen und Spalten bei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{position}]{\text{Trans-}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 5 \\ 7 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \qquad (A*B)^T = B^T * A^T$$

Bem:

A, B seien nxn-Matrizen, A^{-1}, B^{-1} seinen deren Inverse
Was ist das Inverse von (A*B) also $(A*B)^{-1}$=?

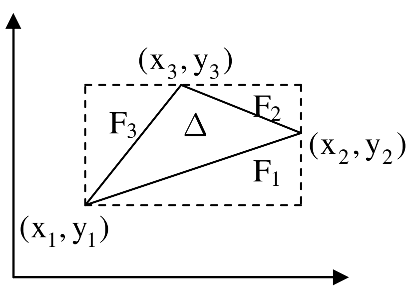
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{5n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{31}, a_{12} + \lambda a_{32} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ a_{51} & \cdots & a_{5n} \end{pmatrix}$$

addiert man das λ-fache der dritten Zeile des 2 Faktors zur ersten Zeile, sonst alles unverändert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$E_n(i,k,\lambda)^{-1} = E_n(i,k,-\lambda)$

$E_n(i,k,\lambda)$ A addiert diese Multiplikation das λ-fache der k-ten Spalte zur i-ten Zeile



$\boxed{} = (x_2 - x_1) * (y_3 - y_1)$
$F_1 = 0{,}5 * (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$
$F_2 = 0{,}5 * (x_2 - x_3)(y_3 - y_2)$
$F_3 = 0{,}5 * (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$

Fläche Δ: $(x_2 - x_1) * (y_3 - y_1) - \frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 - x_1)(y_3 - y_1))$

$(x_2 - x_3) = (x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)$

$$\Delta = \begin{array}{l} (x_2 - x_1) * ((y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_3 - y_2)) - (x_3 - x_1) * (\frac{1}{2}(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_3 - y_2)) \\ = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) * (y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \end{array}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad \text{2x2 - Determinante}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} := ad - bc \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 34 - 2*6 = 0$$

3-er Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := (a_1*b_2*c_3 + a_2*b_3*c_1 + a_3*b_1*c_2) - (c_1*b_2*a_3 - c_2*b_3*a_1 - c_3*b_1*a_2)$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$V_{(i,k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Was macht diese Matrix bei Multiplikation von links.

Sie vertauscht die i-te und k-te Zeile des zweiten F.

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 2&1&0&3&4 \\ 1&1&2&2&1 \\ 5&2&1&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&2&1&1&0 \\ 1&1&2&2&1 \\ 2&1&0&3&4 \end{pmatrix} \text{Vertauschung der i-ten und k-ten Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{neue Matrix}]{} \begin{matrix} \text{Sie heißt } A_{(j),(k)} \\ (m-1)(n-1) \\ (j \neq j_2,\ k \neq k_2) \end{matrix} \Rightarrow A_{(j,j_2)(k,k_2)}$$

Def. Determinante

n=2 $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad |A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}$

n =allg. ∈ □ $\quad |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} |A_{(j,1)}| a_{j1}$

$|A|$ besteht aus n! Summanden (wenn A eine mxn Matrix)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} |A_{(j,1)}| a_{j1} = \sum (-1)^{1+j+VZ(k,2)} |A_{(j,k)(1,2)}| a_{j1}a_{k2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \end{pmatrix}$$

Es wird von der Matrix $A_{(j,1)}$ die erste Spalte und (k-1) Zeile gestrichen (sofern k>j), andernfalls wird die k-te Zeile gestichen

$$(-1)^{VZ(k,2)} = \begin{cases} (-1)^{1+(k-1)} = (-1)^{2+k} & \text{falls } j<k \\ (-1)^{1+k} = (-1)^{2+k+1} & \text{falls } j>k \end{cases}$$

Was passiert, wenn ich die ersten beiden Spalten vertausche?
Aus Fall (1*) wird Fall (2*)

Die Determinante ändert das Vorzeichen (VZ)!!!
Feststellung: Bei Vertauschung von Spalte 1 und 2 ändert die Det. ihr Vorzeichen.

Beh.:

Eine Det. ändert bei Vertauschung zweier beliebiger verschiedener Spalten ihr VZ.
Beweis: Klar für den Fall n=2

Annahme: Es gilt für die Det. von (n-1)*(n-1)-Matrizen zu zeigen. Dann gilt es auch für nxn-Matrizen.

1. Fall: Es finde eine Vertauschung von k,j beide ungleich 1 statt. Dann ändert sich (wegen der Annahme) das VZ der $|A_{j1}|$. Also ändert sich das VZ von der Det. A

2. Fall: Vertauschung von 1-ter Spalte mit 2-ter Spalte (schon bewiesen)
3. Fall: Vertauschung von 1-ter mit k-ter Spalte (k not z)
Führe ich zurück auf Vertauschung von a) k mit 2 (der jeweils vorhandenen Matrix)
b) 2 mit 1 (der jeweils vorhandenen Matrix)
c) 2 mit k (der jeweils vorhandenen Matrix)
Außerdem gilt (ohne Beweis, aber mit ähnlicher Argumentation)
(1) $|A^T|=|A|$ (2) $|B*A|=|B|*|A|$ B,A nxn-Marizen

Folgerungen: (1) eine Det. bei der 2 Zeilen/Spalten übereinstimmen, hat den Wert 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 17 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ weil} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 17 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5*1 & 3 \\ 2 & 4 & 5*1 & 12 \\ 3 & 1 & 5*3 & 17 \\ 5 & 7 & 5*5 & 9 \end{vmatrix} = 5* \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 17 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 5*0 = 0$$

(2) Die Multiplikation aller Elemente einer Zeile/Spalte mit einem Faktor c ändert den Wert der Det. um den Faktor c.
(3) Ist eine Zeile/Spalte das Vielfache einer anderen Zeile/Spalte, so hat die Det. den Wert 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\alpha_{1k} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & & a_{2k}\alpha_{2k} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & & & a_{mk}\alpha_{mk} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & & & a_{mk} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & & \alpha_{2k} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & & & \alpha_{mk} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\alpha_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\alpha_{21} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{m1}\alpha_{m1} & & & & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum (a_{1j}+\alpha_{1j})(-1)^{1+j}\left|A_{(j),(1)}\right| = \sum a_{1j}(-1)^{1+j}\left|A_{j1}\right| + \sum \alpha_{1j}(-1)^{1+j}\left|A_{j1}\right|$$

Wert der Det. mit den $a_{11},\ldots,a_{mn}$ in der ersten Spalte + Det. mit den α's in der ersten Spalte
(4) Det. sind bez. einer festen aber beliebigen Zeile/Spalte linear.

Kompakte Schreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{Operationen } \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \qquad \lambda\vec{a}\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^T * \vec{b} = a_1*b_1 + a_2*b_2 + \ldots + a_n*b_n \qquad \text{Schule: } \vec{a}*\vec{b} = <\vec{a},\vec{b}> = \vec{a}^T\vec{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a_k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \qquad \text{k-te Spalte, } A=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n})$$

$$\vec{a}^{(k)} = \text{k-te Zeilenvektor} = (a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}) \qquad \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}^{(1)} \\ \vec{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{a}^{(m)} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1}^{(T)} \\ \overrightarrow{a_2}^{(T)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}^{(T)} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{b_2},...,\overrightarrow{a_m}+\overrightarrow{b_m}\right)$$

Erinnerung: $A=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_j},...,\overrightarrow{a_n})$

(1) $\det(A)=\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_j},...,\overrightarrow{a_n})=-(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_j},...,\overrightarrow{a_k},...,\overrightarrow{a_n})$ Operation der Vertauschung

(2) $\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_j},...,\overrightarrow{\lambda a_j},...,\overrightarrow{a_n})=0$

(3) $\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{\alpha_k},...,\overrightarrow{a_n})=\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k},...,\overrightarrow{a_n})+\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{\alpha_k},...,\overrightarrow{a_n})$

(4) $\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k}+\overrightarrow{\alpha a_j},...,\overrightarrow{a_n})=\det(\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_j}...,\overrightarrow{a_k},...,\overrightarrow{a_n})$

Addiert man in einer Det. zu einer Zeile/Spalte das Vielfache einer anderen Zeile/Spalte, so ändert sich der Wert nicht.

Bew.: $\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k},...,\overrightarrow{a_n})+\alpha\underbrace{\det(\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_j},...,\overrightarrow{a_n})}_{0}$

det (A+B)=det(A)+det(B) UNFUG

n=5 $\quad \det \begin{aligned}&(2\overrightarrow{a_1},2\overrightarrow{a_2},...,2\overrightarrow{a_n})=\det(A+A)=2^n\det(A)\\ &=2\det(\overrightarrow{a_1},2\overrightarrow{a_2},...,2\overrightarrow{a_n})=2*2\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},2\overrightarrow{a_3},...,2\overrightarrow{a_n})\end{aligned}$

$$\begin{vmatrix}1&2&8&7&4\\0&3&1&9&3\\0&0&5&1&2\\0&0&0&7&5\\0&0&0&0&9\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&1&9&3\\0&5&1&2\\0&0&7&5\\0&0&0&9\end{vmatrix}+0*?+0*?+0*?$$

$$=1*3\begin{vmatrix}5&1&2\\0&7&5\\0&0&9\end{vmatrix}+0*?=1*3*5\begin{vmatrix}7&5\\0&9\end{vmatrix}=1*3*5*7*9$$

Bem.:

Die Det. einer oberen oder unteren Δ-Matrix ist das Produkt der Elemente auf der Diagonale.

$$\begin{vmatrix}1&0&3&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-\left(1^4\right)=-1$$

hier vertausche ich die 2 und 3 Zeile.

hier ziehe ich die 3 Zeile von der 4 ab.

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}}_{nxn-\text{Matrix}}\qquad \det(A)=a_{11}*A_{11}+(-1)^{1+2}a_{21}A_{21}+...+(-1)^{n+1}a_{1n}A_{n1}=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(-1)^{k+j}a_{jk}A_{jk}}_{k\text{ ist fest}}\ (1)$$

Determinantenentwicklungssatz:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{jk}A_{jk}\ (2)$$

Beweis: 2 aus 1 durch Transposition

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{jr}A_{jk}=\ ?\quad \text{für } r\neq k=\ ?\ \text{für}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}A_{jk}=\det(A)=0\ \Rightarrow\ \text{nach Entwicklungssatz}$$

Verbesserter Entwicklungssatz

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{jr}A_{jk}=\begin{cases}0, \text{ wenn } r\neq k\\ \det(A) \text{ wenn } r=k\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{rj}A_{kj}=\begin{cases}0, \text{ wenn } r\neq k\\ \det(A) \text{ wenn } r=k\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\qquad B=(b_{ik})\qquad b_{ik}:=(-1)^{i+k}A_{ik}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&-2&4\\-1&3&-5\\-1&1&1\end{pmatrix}\quad B^T=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&3&1\\4&-5&1\end{pmatrix}\quad B^TA=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad AB^T=\text{dasselbe}$$

$\det(A)=2$

$$\frac{1}{2}B^T=A^{-1}$$

Satz:

A sei quadratische Matrix. Hat A eine Inverse, so gilt

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}B^T,\ \text{wobei } B=(b_{ik})\qquad b_{ik}=(-1)^{i+k}A_{ik}$$

Beweis:

$$(C_{rk})\qquad C_{rk}=\sum_{j=1}^{n}b_{jr}a_{jk}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+r}A_{jr}a_{jk}=\begin{cases}\det(A) \text{ wenn } r=k\\ \text{o sonst}\end{cases}$$

$B^TA=$

$$B^TA=\begin{pmatrix}\det(A)&0&0\\0&\det(A)&0\\0&0&\det(A)\end{pmatrix}=\det(A)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_n\ \text{Einheitsmatix}$$

$$B^TA=\det(A)I_n\qquad (\det(A))^{-1}B^TA=I_n\qquad AB^T\ \text{ebenso}$$

Satz:

Eine quadratische Matrix A hat genau dann ein Inverses, wenn $\det(A)\neq 0$

Beweis:

A sei invertierbar, d. h. es gibt ein A^{-1}

$1=\det(I_n)=\det(A*A^{-1})=\det(A)*\det(A^{-1})\Rightarrow\det(A)\neq 0$

Wenn andererseits $\det(A)\neq 0$, dann haben wir das Inverse sogar konstruiert.

Invertiere

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

Führe diese durch Zeilenaddition / Zeilenvertauschung und Multiplikation mit Konstantem Faktor auf den Diagonalterm.

Buchhaltung

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\qquad A*B\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4\qquad B*A=I_4$$

$A = \begin{pmatrix}1&3&3&3\\0&0&0&-2\\1&2&1&2\\0&-1&-2&0\end{pmatrix}$ Berechne das Inverse $B=(b_{ik})$ $b_{ik} = A_{ik}(-1)^{i+k}$ Subdeterminante

$B = \begin{pmatrix}6&4&2&0\\15&-10&5&0\\-6&4&-2&0\\6&-4&2&0\end{pmatrix}$ $b_{11} = \det\begin{pmatrix}0&0&-2\\2&1&2\\-1&-2&0\end{pmatrix} = -2\begin{vmatrix}2&1\\-2&0\end{vmatrix} = 6$

$b_{12} = \det\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&1&2\\0&-2&0\end{pmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}0&2\\-2&0\end{vmatrix} = 4$

Kandidat fürs Inverse

$\frac{1}{\det(A)}B^T = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}6&15&-6&6\\-4&-10&4&-4\\2&5&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $B^T A\begin{pmatrix}0&\cdots\\\vdots&\ddots\end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix}1&3&3&3\\0&6&-3&-7\\4&-4&6&5\\-8&-22&5&28\end{pmatrix} = (-1)^{2+4}*(-2)\begin{vmatrix}1&3&3\\1&2&1\\0&-1&-2\end{vmatrix} = 0$

Grund det(A)=0 Wir prüfen das nach

0, weil 1. Zeile = 2. Zeile – 3. Zeile

$\begin{pmatrix}0&-12&6&5\\0&6&-3&-7\\4&-4&6&5\\-8&-22&5&28\end{pmatrix} = A$ $\begin{pmatrix}4&-4&6&5\\0&6&-3&-7\\0&-12&6&15\\0&-30&17&38\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4&-4&6&5\\0&6&-3&-7\\0&0&0&1\\0&0&2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4&-4&6&5\\0&6&-3&-7\\0&0&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\det(A) = (-1)^{\overbrace{\text{Anzahl der Vertauschungen}}^{2}} * 4 * 6 * 2 * 1 = 48$

Gauss Algorithmus

A nxn-Matrix B nxm-Matrix

Löse die Gleichung $A * \chi = B$, $\chi=?$ $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ Aufgabe 1: $A*\chi=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Aufgabe 2: $A*\tilde{\chi}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

Aufgabe 1:

$\left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)$ Führe den linken Teil mit Elementaroperationen auf eine A-Matrix

Elementaroperationen

(1) $[i,k]$ für $i \neq k$ “Vertauschung der Zeilen i und k“

(2) $[i,k,\lambda]$ für $i \neq k$ "Addiere das λ-fache der i-ten Zeile zur k-ten Zeile“

(3) $[0,k,\lambda]$ für $\lambda \neq 0$ "Multipliziere die k-te Zeile mit λ“

Dann…

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{[0,1,1/2]}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1/2&1/2&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{[1,2,-1]}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1/2&1/2&0\\0&-1/2&-1/2&1\end{array}\right)\xrightarrow{[2,1,1]}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1/2&-1/2&1\end{array}\right)\xrightarrow{[0,2,2]}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&-1&2\end{array}\right)$$

Bei der letzen Matrix steht auf der rechten Seite die Lösung χ, in diesem Fall das Inverse von A.

Probe:

$\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&2\\1&0&7\end{array}\right)\xrightarrow{[0,1,1/2]}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1/2&1\\1&0&7\end{array}\right)\xrightarrow{[1,2,-1]}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1/2&1\\0&1/2&6\end{array}\right)\xrightarrow{[2,1,1]}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&7\\0&1/2&6\end{array}\right)\xrightarrow{[0,2,2]}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&7\\0&1&12\end{array}\right)\quad \chi=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen

$E_n(i,k) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ Vertauschung von i-ter Spalte und k-ter Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E_7(3,5)$$

Wirkung: $E_n(i,k)$ A=Vertauschung der Zeilen i und k bei A
A=nxn-Matrix
Fazit: die Op. [i,k] kann durch Multiplikation $E_n(i,k)A$ erzeugt werden.

$E_n(i,k,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \lambda \\ & & 1 \end{pmatrix}$ λ Element in der i-ten Spalten und k-ten Zeile

Wirkung: Elementaroperation $[i,k,\lambda]$

$E_n(0,k,\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ λ: k-te Zeile/Spalte

Wirkung: $[0,k,\lambda]$

Bem.:
Unsere Operation entspricht der Hintereinanderausführung der Multiplikation mit geeigneten Elementarmatrizen.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n \rightarrow$ Erbebnis der Umformung

$(\varepsilon_N...(\varepsilon_j...(\varepsilon_1 1)) \mid \varepsilon_N...\varepsilon_j...\varepsilon_1 B)$

$(\varepsilon_N...\varepsilon_j...\varepsilon_1) * A = I_n \Rightarrow (\varepsilon_N...\varepsilon_j...\varepsilon_1) = A^{-1}$

rechts steht $(\varepsilon_N...\varepsilon_j...\varepsilon_1)B = A^{-1}B$

Probe:

$$A\underbrace{(A^{-1}B)}_{\text{gesuchte } \chi} = (A * A^{-1})B = I_n B = B$$

Aufgabe:
A=nxn-Matrix, B=nxm-Matrix (gesucht χ? mit $A*\chi$=B)
Start i=1
(*) Beginn, wenn
$a_{ii} = 0,$ suche ein $a_{ji} \neq 0$ mit j>i und führe [i,j] aus, wenn nicht möglich, dann return ("A^{-1} existiert nicht")

else $[0,i,\frac{1}{a_{ii}}]$ end.

$[i,k,-\frac{1}{a_{ki}}]$ // erzeugt Nullen ober- und unterhalb von a_{ii}

for $i \neq k$ do end for

i:=i+1

wenn i+1>n, dann return ("Fertig") else goto (*)

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-3\\3&2&1\\-1&3&1\end{pmatrix}$$ Finde A^{-1} bzw. Löse $A*\chi=I_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&-3&1&0&0\\3&2&1&0&1&0\\-1&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[{[0,1,1/3]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2/3&-1&3&0&0\\3&2&1&0&1&0\\-1&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[{[1,2,-3]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2/3&-1&3&0&0\\0&0&4&-1&1&0\\-1&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[{[1,3,1]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2/3&-1&3&0&0\\0&0&4&-1&1&0\\0&11/3&0&1/3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[{[2,3]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2/3&-1&3&0&0\\0&11/3&0&1/3&0&1\\0&0&4&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[{[0,3,3/11]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2/3&-1&3&0&0\\0&1&0&1/11&0&3/11\\0&0&4&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[{[2,1,-2/3]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&3/11&0&-2/11\\0&1&0&1/11&0&3/11\\0&0&4&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[{[0,3,1/4]}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&3/11&0&-2/11\\0&1&0&1/11&0&3/11\\0&0&1&-1/4&1/4&0\end{array}\right)\xrightarrow[{[3,1,1]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/44&1/4&-2/11\\0&1&0&1/11&0&3/11\\0&0&1&-1/4&1/4&0\end{array}\right)\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/44&1/4&-2/11\\1/4&0&3/11\\-1/4&1/4&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\5&7&9\end{pmatrix}\quad\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\5&7&9&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right)$$ hat kein Inverses

Problem: A sei eine nxn-Matrix, B nxM-Matrix

Gesucht: Lösung $\chi=?$ von $A*\chi=B$

Spezialfall:

m=n A invertierbar – Gauss Algorithmus

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&2&0&0&1\\0&0&0&1&0&3\\0&0&0&0&1&4\end{pmatrix}$$ Treppenform / Zeilenführer

Bem.:

Jede Matrix lässt sich durch Anwendung von Elementaroperationen auf Treppenform bringen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}}_{\text{keine Treppenform}}\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{keine Treppenform}}\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{keine Treppenform}}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\text{Diagonalmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Zeileführer der Zeile ist der Erste von 0 verschiedene Eintrag a_{ik_i} in dieser Zeile

Eine Matrix ist auf Treppenform, wenn

(1) die Zeilenführer müssen 1 sein ($a_{ik_i}=1$)

(2) für die Indizes $k_1,k_2,...$ gilt $k_1<k_2<k_3...$ usw.

(3) oberhalb der Zeilenführer müssen 0-en stehen

(4) $a_{i+j,k_i}=0$ für alle j>0

Algorithmus (Entzerrungsalgorithmus)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\1&2&1&1&1&3\\1&1&1&0&1&2\\2&3&2&1&2&5\end{pmatrix}$$ A=nxm-Matrix I_n : Setze A links und I_n rechts in ein Schema $(A|I_n)$

Dieses nennen wir die erweiterte Matrix.

Den linken Teil der erweiterten Matrix nennen wir Matrixteil den rechten Operationsteil.

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ Der Operationsteil unterhalb des letzten Zeilenführers heißt Kontrollteil

<u>Kontrollteil:</u> (0,-1,-1,1)
Ist dieser Teil leer, so setzen wir den Kontrollteil = (0,0,…,0) n-Spalten
Wir setzen in den Bereich des Kontrollteil Nullen (nachdem wir uns den Kontrollteil gemerkt haben).

Dann Verschieben wir die Zeilen so nach unten, dass die Zeileführer in der Diagonale stehen. In die leeren Zeilen schreiben wir in die Diagonale eine -1, dann füllen wir das Schema mit Nullen so auf, dass ein m-Zeiliges Schema entsteht.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Spaltenvektoren, mit einer -1 in der Diagonale heißen Kernvektoren, diese fassen wir zu einer Matrix zusammen, die Kernmatrix heißt.
Die Kontrollmatrix kennen wir schon. Der rechte Teil des Schemas heieße jetzt Operationsmatrix.

Kontrollmatrix — **Kernmatrix** — **Operationsmatrix**

K=(0,-1,-1,1)

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Satz:</u> Die Matrixgleichung $A*\chi = B,\ \chi = ?$ ist nur dann und nur dann lösbar, wenn gilt K*B=Nullmatrix (K = Kontrollmatrix)

Sofern dies gilt ist
$\chi = \Omega * B$ eine spezielle Lösung (Ω Operationsmatrix)

Für die Kernmatrix gilt
A*N=Nullmatrix

Die allgemeine Lösung (sofern lösbar) der Matrixgleichung ist $\chi = \Omega * B + N$ Koeffizientenmatrix , wobei die Koeffizientenmatrix eine beliebige Matrix mit soviel Zeilen, wie N Spalten hat und m-Spalten.

$$A*N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Spezielle Lösung</u>
$A*\chi = B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ Gibt es überhaupt eine Lösung?

K=(0,-1,-1,1) * $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = (0,0,-4) Gleichung nicht lösbar!!!

Löse: $A*\chi = B$ für $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ (0,-1,-1,1) * $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ = (0,0,0,0) Also lösbar

Bsp.: A sei nxn-Matrix mit $\det(A) \neq 0$

Kontrollmatrix (K)?	Operationsmatrix (χ)?	Kernmatrix (Ω)?
K=(0,0,…,0) n-Spalten	$N=\varnothing$	$\Omega = A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[0,1,1/4]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[0,2,1/6]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \end{array}\right) \xrightarrow{[2,1,3/4]} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -8 & -46 & 38 \\ 1 & 6 & -4 \\ -24 & -140 & 110 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -46 & 38 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & -140 & 110 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1,2,1/8][1,3,-3]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -46 & 38 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 1/8 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[2,3,8]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -46 & 38 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 1/8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overrightarrow{[0,1,-1/8]} \\ [0,2,4] \\ [0,3,1/2] \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 23/4 & -19/4 & -1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{[2,1,-23/4]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -22 & -3 & -23 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[{[3,1,22]}]{[3,2,-3]} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -25 & 65 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & -8 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -25 & 65 & 11 \\ 7/2 & -8 & -3/2 \\ -1 & 4 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -8 & -46 & 38 \\ 1 & 6 & -4 \\ -24 & -140 & 110 \\ -31 & 180 & 144 \end{pmatrix}$$

Die 4 Zeilen $\overrightarrow{Z_1},...,\overrightarrow{Z_4}$ sind linear Abhängig

$$1*\overrightarrow{Z_1} + 1*\overrightarrow{Z_2} + 1*\overrightarrow{Z_3} + 1*\overrightarrow{Z_4} = 0$$

Entzerre

Was ist die Kontrollmatrix

Bedingung an Lösbarkeit $M*\chi = B$

In B muss die Lösbarkeit der vierten Zeile die Summe der 1, 2 und 3-ten Zeile sein.

(1,1,1,-1) $\qquad$ M = 1. Zeile = 1. Z + 2. Z + 3. Z – 4. Z = (0,0,0,0)

Lösbarkeit (1,1,1,-1) $\qquad$ B=0-Matrix

Vektorraum über R: V

a) Eine abelsche Gruppe bezüglich der Operation + (man kann mit + wie üblich rechnen)
b) Multiplikation der Elemente von V mit Elementen von R erfüllt Regeln
    a. $r(a+b)=ra+rb \quad r\in R,\ a,b\in V$
    b. $(r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a$
    c. $r_1(r_2 a) = (r_1 r_2)a$
    d. $1*a=a$

Die Elemente $a\in V$ heißen Vektoren statt a manchmal $\vec{a}$

Bsp.:

R, Die nx1-Matrizen (Spaltenvektor mit n-Zeilen) nxm-Matrizen

1) Seien $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k} \in A \subset V$ (A Teilmenge Verktorraum (VR) V), $r_1, r_2, ..., r_k \in R$,
dann heißt $\vec{V} = r_1 * \overrightarrow{a_1} + r_2 * \overrightarrow{a_2} + ... + r_k * \overrightarrow{a_k}$ Linearkombination der $\overrightarrow{a_i}$

2) Alle Linearkombinationen von Elementen in A heißen Lin(A) – „Lineare Hülle von A“, die ist ein Vektorraum

3) Die Vektoren $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_k}$ heißen linear unabhängig, wenn aus $r_1 * \overrightarrow{a_1} + r_2 * \overrightarrow{a_2} + ... + r_k * \overrightarrow{a_k} = 0$ folgt

$r_1 = r_2 = r_3 = ... = r_k = 0$

$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad r_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ sind linearabhängig $4 * \overrightarrow{a_1} + 2 * \overrightarrow{a_2} = 0$

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ nicht linear unabhängig

4) Die max. Anzahl linear unabhängiger Elemente in einem VR V heißt Dimension von V – dim(V) Bsp.: V=nxm-Matrizen – dim(V)=n*m

5) Die max. Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix M heißt Rang von M

Begründung von dem Entzerrungsalgorithmus

Aufgabe: $A * \chi = B$ $\qquad \chi = ?$ $\qquad$ A sei nxm-Matrix

Statt dieser Gleichung schreiben wir $A * \chi = I_n * B$. Auf A und I_n wenden wir die Elementaroperationen solange an, bis A auf Treppenform ist. Das Produkt dieser Elementaroperationen nennen wir ε.

$(\underbrace{\varepsilon A}_{\text{Matrixteil (Treppen-form)}})\chi = (\underbrace{\varepsilon I_n}_{\text{Operations-teil}})B \qquad \varepsilon A = \begin{pmatrix} & \Omega_1 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix}$

Bei $(\varepsilon A)\chi$ sind als Zeile k+1 nur 0-en. Also sind bei $(\varepsilon I_n)B = (\varepsilon A)\chi$ ab Zeile k+1 nur Nullen.

Folgerung:

Ω_2 (Kontrollmatrix)*B = Nullmatrix, wenn Gleichung lösbar

Notwendig für Lösbarkeit ist Kontrollmatrix B=0

Wir sehen jetzt in der Matrix $\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix}$ den Teil von $\Omega_2 = 0$ (Alle Einträge = 0), die entstehende Matrix nennen wir Ω.

Unsere Aufgabe (sofern die Kontrollbedingung erfüllt ist) heißt dann $(\varepsilon A)\chi = \Omega B$.

Jetzt wenden wir Zeilenvertauschung auf das Schema $\left[\varepsilon A \middle| \Omega\right]$ so an, dass die Zeilenführer auf die Diagonale gebracht werden. Die dafür notwendigen Operationen fassen wir in der Matrix $\tilde{\varepsilon}$ zusammen.

Die Gleichung lautet dann

$(\tilde{\varepsilon}(\varepsilon A))\chi = (\tilde{\varepsilon} * \Omega)B$

ist der entzerrte Matrixteil bis auf die eingesetzte – 1 – e

Wir suchen nun nach einer speziellen Lösung. Die Zeilen-/Spaltennummern in den keine 1 in der Diagonale steht, nennen wir kritische Zeilen, ihre Zeilennummer kritischer Index.

Spezielle Lösung: χ soll in den kritischen Zeilen nur 0-en haben

$\tilde{\varepsilon}(\varepsilon A) = M \qquad M\chi = \Omega B, \qquad \chi$ speziell, $\qquad \Omega = \tilde{\varepsilon}\Omega$

k_i kritisch $\quad M = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 0 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 0 && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \chi = \Omega * B$

Die Gleichung wird (weil χ speziell) nicht verändert, wenn wir die kritischen Diagonalelemente verändern. Ich kann also in ^M anstelle der Nullen in den kritischen Diagonalelementen jedoch eine 1 setzen ohne die Gleichung zu verändern.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\chi}_{\text{speziell}} = \Omega * B$$

$\chi = \Omega B$, für die spezielle Lösung (spezielle Lösung = Operationsmatrix * B)

Also war die Kontrollmatrixbedingung auch hinreichend.

Gesucht wird: Allg. Lösung

$\hat{\chi}$ sei eine weitere Lösung unserer Ausgangsgleichung

$A*\chi = B, \quad A*\hat{\chi} = B \Rightarrow A*\chi - A*\hat{\chi} = 0$

$A*(\chi - \hat{\chi}) = 0$ Also gilt für jede Spalte N von $(\chi - \hat{\chi})$ das A*N=0 N=Kernvektor

Eigenvektoren:

Gegeben sei eine quadratische Matrix A

Ein Spaltenvektor $\gamma \neq 0$ heißt Eigenvektor, wenn es eine Zahl λ gibt, so dass $A*\lambda = \lambda * \gamma$

Die Zahl λ heißt Eigenwert.

Finde die Eigenvektoren

$A*\gamma = \lambda I_n \gamma \qquad (A - \lambda I_n)\gamma = 0$

Situation

A=nxm-Matrix finde alle Kernvektoren $A\vec{n} = 0$

1)$\tilde{\varepsilon}$ 2)(εA) 1) Zeilenvertauschungen (Zeilenführer in Diagonale)

2) brachte Matrix auf Diagonalform

$A\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{\varepsilon}(\varepsilon A))\vec{n} = 0 \qquad \hat{A} := \tilde{\varepsilon}(\varepsilon A)$

Gesucht Kernvektoren für $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha_1 & & & \\ & 1 & \alpha_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{kritische Zeile}$$

Beobachtung:

Wenn $n \neq 0$ ein Kernvektor ist, dann hat er in mindestens einer kritischen Zeile einen Wert $\neq 0$ stehen.

Annahme: $\vec{n}$ habe in allen kritischen Zeilen eine Null stehen. Dann dürfen wir bei $\hat{A}$ in den kritischen Zeilen irgendetwas einsetzen ohne die Gleichung $\hat{A}\vec{n} = 0$ zu verändern. Wir setzen 0 oberhalb der Diagonale ein und 1 in der Diagonale.

$$I_A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ und es gilt: $I_A \vec{n} = 0$ Da $I_A \vec{n} = \vec{n}$ erhalten wir $\vec{n} = 0$

Wir interessieren uns nun für die spezielle Kernvektoren.

$\overrightarrow{n_{k_j}}$ ($\neq 0$ in Zeile k_j, in alle anderen Zeilen = 0)

Beobachtung:

$\hat{A}\overrightarrow{n_j} = 0$ in $\hat{A}$ dürfen wir alle kritischen Spalten außer k_j ändern

$$\rightarrow \tilde{I}_A = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha_1 & & & \\ & 1 & \alpha_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k_j \quad \tilde{I}_A * \overrightarrow{n_{k_j}} = 0$$

$1 + \overrightarrow{n_{k_j}}$

λn_{k_j} sind ebenfals Kernvektoren

Wir multiplizieren so, dass in k_j – Zeile eine -1 steht

$$\overrightarrow{n_{k_j}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ -1 \\ \infty \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r{=}k_j-1 \\ \rightarrow \\ k_j \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & \alpha_1 & & & \\ & 1 & \alpha_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{n_{k_j}} = 0 = \begin{pmatrix} \beta_1 - 1\alpha_1 \\ \beta_2 - 1\alpha_2 \\ \dots \\ \beta_r - 1\alpha_r \\ 0(-1) \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = \alpha_1 \qquad \beta_2 = \alpha_2 \qquad \dots \qquad \beta_r = \alpha_r \qquad r = k_j - 1 \qquad \beta_{k_j} = 1$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}$ Das war das Ergebnis der Entzerrung

Sei $\vec{n}$ nun allgemeiner Kernvektor mit Einträgen

$\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}, \dots, \gamma_{k_q}$ in den kritischen Zeilen

$\vec{n} + \gamma_{k_1} * \overrightarrow{n_{k_1}} + \gamma_{k_2} * \overrightarrow{n_{k_2}} + \gamma_{k_q} * \overrightarrow{n_{k_q}} =$ Kernvektor=0

hat Nullen in kritischen Zeilen

$\vec{n} = -\gamma_{k_1} \overrightarrow{n_{k_1}} - \gamma_{k_2} \overrightarrow{n_{k_2}} - \dots - \gamma_{k_q} \overrightarrow{n_{k_q}} =$ Linearkombination der speziellen Kernvektoren

Die Lineare Hülle der speziellen Kernvektoren enthält ALLE Kernvektoren

Bestimme Eigenvektoren und Eigenwert von

$M = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \qquad M\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda I_2 \vec{v}$

Bed.: Es gibt kein

A^{-1} $\det(M\text{-}\lambda I_2) = 0$

$(\underbrace{M\text{-}\lambda I_2}_{A})\vec{v} = 0 \qquad M\text{-}\lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 2 & -8-\lambda \end{pmatrix}$

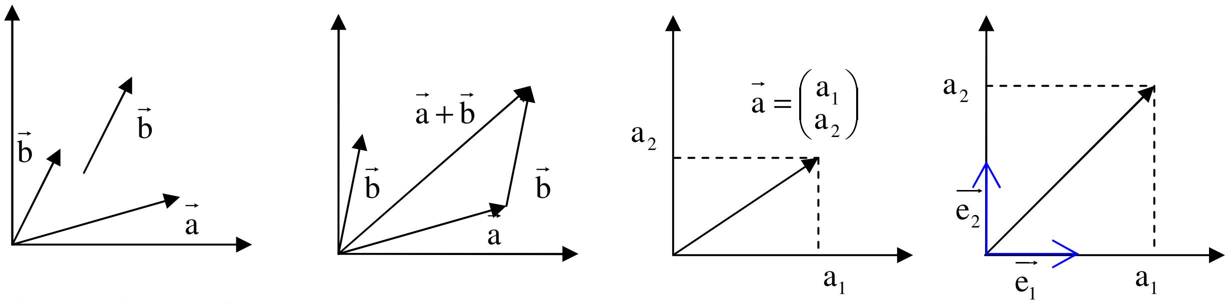
$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 2 & -8-\lambda \end{pmatrix} = -(2-\lambda)(8-\lambda) + 12$

$12 - (2-\lambda)(8-\lambda) = 0 \qquad \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$

Vektorrechnung

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ naive Vorstellung „gerichtete Größe“

$\vec a, \vec b$ Vektoren, es kommt nicht auf den Ursprungspunkt an



$\vec a = a_1 * \vec{e_1} + a_2 * \vec{e_2}$ durch Linearkombination von Koordinateneinheitsvektoren

$\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec a + \vec b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Länge eines Vektors (oder Betrag)

$|\vec a| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ Pythagoras

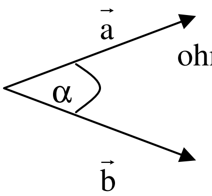
Skalarprodukt: $\vec a * \vec b = a_1 * b_1 + a_2 * b_2$ Zahl, kein Vektor // manchmal statt $\vec a * \vec b \Rightarrow < \vec a, \vec b >$

Bem:

$|\vec a|^2 = \vec a * \vec a$

Geometrische Interpretation des Skalarproduktes:

$\vec a * \vec b = |\vec a| * |\vec b| \cos(\alpha)$

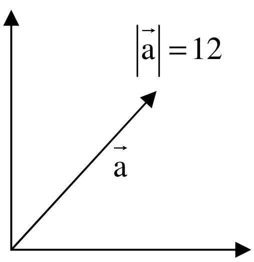


ohne Beweis

Zwei Vektoren heißen orthogonal, wenn $\vec a * \vec b = 0$ (passiert, wenn $\vec a$ und $\vec b$ senkrecht aufeinander stehen, oder ein Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

$|\vec n|$ mit $|\vec n| = 1$ heißt Einheitsvektor

Gesucht: Einheitsvektor $\vec n$ mit derselben Richtung, wie $\vec a$ $(\neq 0)$



$\vec n = \frac{\vec a}{12} = \frac{\vec a}{|\vec a|}$ Einheitsvektor

Aufgabe: $\vec a$ $(\neq 0)$ Bestimme alle Einheitsvektoren $\vec n$ mit $\vec n \perp \vec a$

$\vec n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ $\quad n_1 * a_1 + n_2 * a_2 = 0 \qquad n_1^2 + n_2^2 = 1$

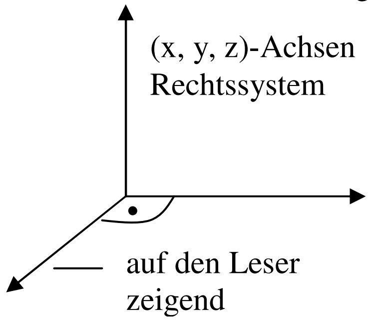
$n_1 = -\lambda a_2, \quad n_2 = \lambda a_1 \quad \lambda = \sqrt{a_1^1 + a_2^2} = \frac{1}{|\vec a|}$ $\qquad \vec n = \frac{1}{|\vec a|} \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

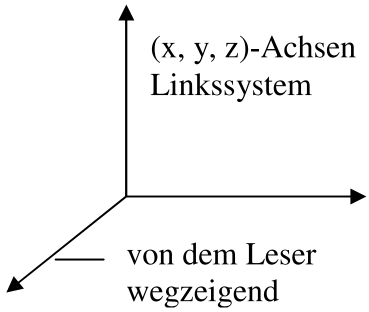
Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$

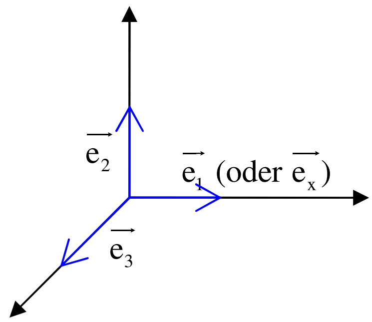
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R} \right\},\quad \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}, \ldots,\ \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Addition als Spaltenmatrizen / Multiplikation mit $\mathbb{R}$ oder $\lambda \in \mathbb{R}$ wie bei Spaltenmatrizen

3 dimensionaler Anschauungsraum





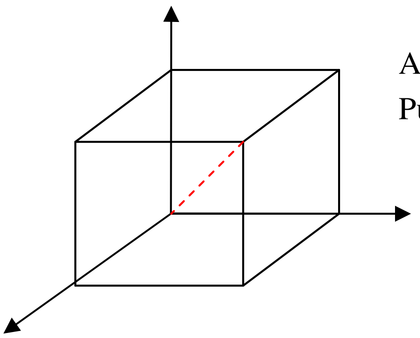


(Kopf, rechter Fuß, linker Fuß – ist ein Rechtssystem)

Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ werden so gewählt, dass sie ein Rechtssystem bilden.

Was bilden...

$\underbrace{\left(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1\right)}_{\text{Rechtssystem}}$, $\underbrace{\left(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)}_{\text{Rechtssystem}}$, $\underbrace{\left(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\right)}_{\text{Linkssystem}}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$



Aufgabe: Bestimme den Abstand des Punktes $\vec{a}$ von der durch die Punkte $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3,\ \vec{p}_4,\ \vec{p}_5$ aufgespannte Ebene.

$\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

Skalarprodukt: $\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

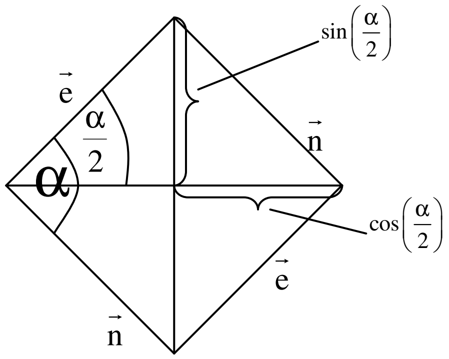
Länge von $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$ Geometrische Interpretation des Skalarproduktes

Wir zeichnen die $\underbrace{\text{2-dimensionale Ebene}}_{*}$, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird

(und legen diese in Tafelebene).

* Lineare Hülle von $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ $\quad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} \quad \vec{n} = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$

$$2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left|\vec{e} + \vec{n}\right| \qquad 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left|\vec{e} - \vec{n}\right|$$



Additionstheorem:

$$\sin(\beta+\gamma)=\sin(\beta)*\cos(\gamma)+\sin(\gamma)*\cos(\beta)$$
$$\cos(\beta+\gamma)=\cos(\beta)*\cos(\gamma)+\sin(\beta)*\sin(\gamma)$$

$$\sin(\alpha)=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)*\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

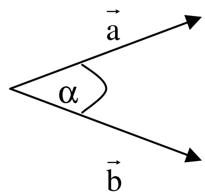
$$\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{e}+\vec{n}\right|^2-\left|\vec{e}-\vec{n}\right|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\vec{e}+\vec{n}\right)*\left(\vec{e}+\vec{n}\right)-\left(\vec{e}-\vec{n}\right)*\left(\vec{e}-\vec{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{e}\right|^2+\left|\vec{n}\right|^2-\left|\vec{e}\right|^2-\left|\vec{n}\right|^2+2\vec{e}*\vec{n}+2\vec{e}*\vec{n}\right)=\vec{e}*\vec{n}=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|*\left|\vec{b}\right|}$$

Genauso mit sin.:

$$\sin(\alpha)=\sqrt{1-\left(\vec{e}*\vec{n}\right)^2}$$
$$\sin(\alpha)=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)*\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}*\left(\left|\vec{e}+\vec{n}\right|*\left|\vec{e}-\vec{n}\right|\right)=\frac{1}{2}*\sqrt{\left|\vec{e}+\vec{n}\right|^2*\left|\vec{e}-\vec{n}\right|^2}$$
$$=\frac{1}{2}*\sqrt{\left(\vec{e}+\vec{n}\right)*\left(\vec{e}+\vec{n}\right)*\left(\vec{e}-\vec{n}\right)*\left(\vec{e}-\vec{n}\right)}=\frac{1}{2}*\sqrt{2^2-2^2*\left(\vec{e}*\vec{n}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\vec{e}*\vec{n}\right)}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\qquad \text{Skalarprodukt: } \vec{a}*\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

$$\vec{a}*\vec{b}=\left|\vec{a}\right|*\left|\vec{b}\right|\cos(\alpha)$$



$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}*\vec{a}}$$

orthogonal: $\vec{a}\perp\vec{b}=0$

Seien $\vec{a},\ \vec{b}\in\mathbb{R}^3$ mit $\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0$

Bestimme alle Vektoren, die orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\quad \vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\qquad \vec{z}\perp\vec{a},\quad \vec{z}\perp\vec{b}$$

Bedingung:

$$z_1*a_1+z_2*a_2+z_3*a_3=0\qquad z_1(a_1*b_2-a_2*b_1)=(b_3*a_2-a_3*b_2)\qquad z_3=1$$
$$z_1*b_1+z_2*b_2+z_3*b_3=0\qquad z_2(a_2*b_1-a_1*b_2)=(b_3*a_1-a_3*b_1)$$
$$z_1=\frac{(b_3*a_2-a_3*b_2)}{(a_1*b_2-a_2*b_1)}\qquad z_2=\frac{(b_3*a_1-a_3*b_1)}{(a_2*b_1-a_1*b_2)}\qquad \lambda=\frac{1}{(a_1*b_2-a_2*b_1)}$$
$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\lambda\underbrace{\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}}_{\text{Abk.: }\vec{a}\text{x}\vec{b}\text{ Vektorprodukt}}$$

Vektorprodukt (existiert nur im $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{a}x\vec{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Regeln:

$\vec{a}x\vec{b}=-\vec{b}x\vec{a}$ $\quad (\lambda\vec{a})x\vec{b}=\lambda(\vec{a}x\vec{b})$ $\quad \vec{a}x(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}x\vec{b}+\vec{a}x\vec{c}$

$\vec{a}x\vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$

Geometrische Interpretation: $\left|\vec{a}x\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|x\left|\vec{b}\right|\sin(\alpha)$

Beweis:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \vec{n}=\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

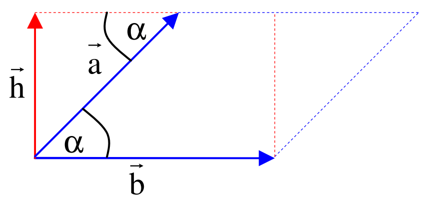
$$\left(\vec{e}x\vec{n}\right)*\left(\vec{e}x\vec{n}\right)=e_2^2n_3^2+e_3^2n_2^2+e_3^2n_3^2+e_1^2n_2^2+e_1^2n_2^2+e_2^2n_1^2-2\{e_2n_2e_3n_3+e_3n_2e_1n_1+e_1n_1e_2n_2\}$$

$$=\left(e_3^2+e_2^2\right)*n_1^2...-2\{...\}=n_1^2\left(1-e_1^2\right)+n_2^2\left(1-e_2^2\right)+n_3^2\left(1-e_3^2\right)-2\{...\}=1-\left(\vec{e}*\vec{n}\right)^2$$

$$\vec{e}*\vec{n}=\left|\vec{e}\right|\left|\vec{n}\right|\cos(\alpha)=\cos(\alpha)=1-\cos(\alpha)^2=\sin(\alpha)^2$$

$$\left|\vec{e}x\vec{n}\right|^2=\sin(\alpha)^2 \qquad \left|\vec{e}x\vec{n}\right|=\sin(\alpha) \qquad \frac{1}{\vec{a}}*\frac{1}{\vec{b}}*\left(\vec{a}x\vec{b}\right)=\sin(\alpha)$$

$\vec{a},\ \vec{b}\in\mathbb{R}^3$



|F| = Fläche des Parallelogramms = $\left|\vec{b}\right|*\left|\vec{h}\right|$

$\left|\vec{h}\right|=\left|\vec{a}\right|*\left|\sin(\alpha)\right|$ aus $\frac{\vec{h}}{\left|\vec{a}\right|}=\sin(\alpha)$

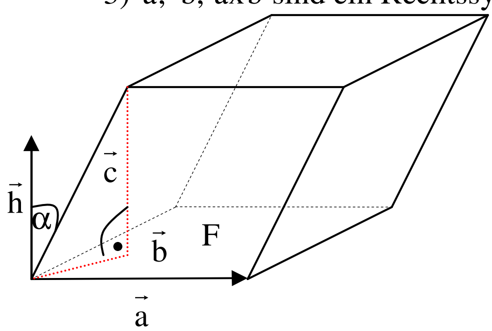
$$\left|F\right|=\left|\vec{a}\right|*\left|\vec{b}\right|*\left|\sin(\alpha)\right|=\left|\vec{a}x\vec{b}\right|$$

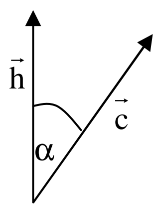
Charakterisierung von $\vec{a}x\vec{b}$

1) $\left|\vec{a}x\vec{b}\right|$ = Fläche des von $\vec{a},\ \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

2) orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$

3) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}x\vec{b}$ sind ein Rechtssystem





Bestimme das Volumen

V= $\left|F\right|*\left|\vec{h}\right|=\left|\vec{a}x\vec{b}\right|$

$\vec{h}$ hat Richtung von $\vec{a}x\vec{b}$

$\left|\vec{h}\right|=\left|\left|\vec{c}\right|soc(\alpha)\right|$ $\qquad$ V= $\left|\left|\vec{a}x\vec{b}\right|*\left|\vec{c}\right|\cos(\alpha)\right|=\left|\left(\vec{a}x\vec{b}\right)*\vec{c}\right|$

Spatprodukt

$\left(\vec{a}x\vec{b}\right)*\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ heißt Spatprodukt

$\left(\vec{b}x\vec{c}\right)*\vec{a}=\left(\vec{c}x\vec{a}\right)*\vec{b}=-\left(\vec{a}x\vec{c}\right)*\vec{b}=-\left(\vec{c}x\vec{b}\right)*\vec{a}=-\left(\vec{b}x\vec{a}\right)*\vec{c}$ von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats

Wir rechnen mal Komponentenweise

Zwischenrechnung

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\qquad \begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$$

$$=c_1\underbrace{(a_2b_3-a_3b_2)}_{\text{1. Komponente}}+c_2\underbrace{(a_3b_1-a_1b_3)}_{\text{2. Komponente}}+c_3\underbrace{(a_1b_2-a_2b_1)}_{\text{3. Komponente}}=\left(\vec{a}\mathrm{x}\vec{b}\right)*\vec{c}$$

$$\left(\vec{a}\mathrm{x}\vec{b}\right)*\vec{c}=\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right|$$

$$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&\vec{e_1}\\a_2&b_2&\vec{e_2}\\a_3&b_3&\vec{e_3}\end{vmatrix}=\vec{e_1}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}+\vec{e_2}\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}+\vec{e_3}\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e_3}$$

$$=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&\vec{e_1}\\a_2&b_2&\vec{e_2}\\a_3&b_3&\vec{e_3}\end{vmatrix}=\vec{a}\mathrm{x}\vec{b}$$

Beweise, dass

$$\vec{a}\mathrm{x}\vec{b}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&\vec{e_1}\\a_2&b_2&\vec{e_2}\\a_3&b_3&\vec{e_3}\end{vmatrix}\quad \text{orthogonal zu } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ ist}$$

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&\vec{e_1}\\a_2&b_2&\vec{e_2}\\a_3&b_3&\vec{e_3}\end{vmatrix}*\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&\vec{e_1}*\vec{c}\\a_2&b_2&\vec{e_2}*\vec{c}\\a_3&b_3&\vec{e_3}*\vec{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

Gegeben:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_4\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_4\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_4\end{pmatrix}\quad \in \mathbb{R}^4$$

Bestimme alle Vektoren, die orthogonal zu $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind.

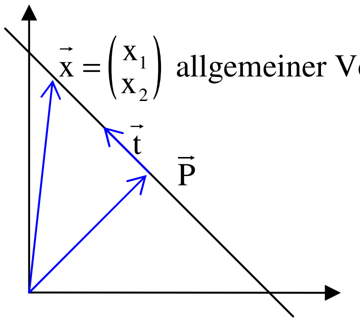
$$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{V}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1&\vec{e_1}\\a_2&b_2&c_2&\vec{e_2}\\a_3&b_3&c_3&\vec{e_3}\\a_4&b_4&c_4&\vec{e_4}\end{vmatrix}\quad \text{Lösung: } \lambda\vec{V}$$

Allgemeine Erkenntnis:

$$\overrightarrow{a^{(1)}},\ \overrightarrow{a^{(2)}},\ \overrightarrow{a^{(3)}},\dots,\overrightarrow{a^{(n-1)}}\ \in \mathbb{R}^n$$

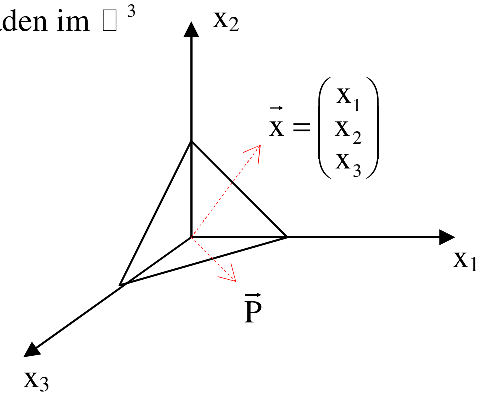
$$\begin{vmatrix}a_1^{(1)}&a_1^{(2)}&\cdots&a_1^{(n-1)}&\vec{e_1}\\a_2^{(1)}&a_2^{(2)}&\cdots&a_2^{(n-1)}&\vec{e_2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_n^{(1)}&a_n^{(2)}&\cdots&a_n^{(n-1)}&\vec{e_n}\end{vmatrix}\quad \text{orthogonal zu allen diesen Vektoren}$$

Geraden im $\mathbb{R}^2$



1. Form: $\vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{t}$
2. Form: $a_1x_1 + a_2x_2 = r$

Geraden im $\mathbb{R}^3$



1. Form: $\vec{x} = \vec{P} + \lambda_1\vec{t_1} + \lambda_2\vec{t_2}$ $\quad \vec{t_1},\ \vec{t_2}$ in Ebene, l. u.
2. Form: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = r$

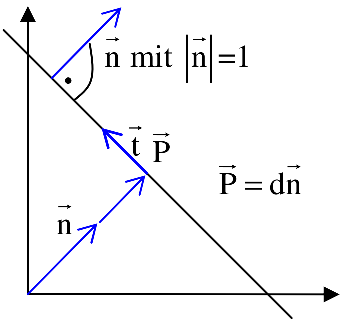
n-1 dimensionalen Ebenen im $\mathbb{R}^n$

1. Form: $\vec{t_1}, \vec{t_2}, ..., \vec{t_{n-1}}$ fest, lin. unabhängig $\quad \vec{P}$ Ein Aufpunkt, fest $\quad \vec{x} = \vec{P} + \lambda_1\vec{t_1} + \lambda_2\vec{t_2} + ... + \lambda_{n-1}\vec{t_{n-1}}$
2. Form: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = r$

Weitere Darstellung

n-1 dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$ können auch durch n-Punkte $\vec{P_1}, \vec{P_2}, ..., \vec{P_n}$

Kürzester Abstand vom Nullpunkt



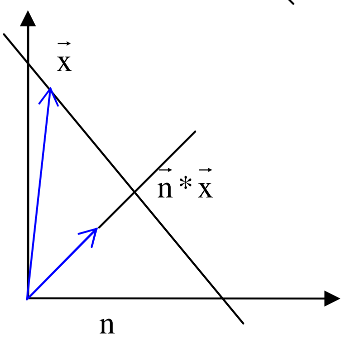
$\vec{x} = d\vec{n} + \lambda\vec{t}$

Abs tan d von $\vec{x}$ zu 0

$(\vec{x})^2 = (d\vec{n} + \lambda\vec{t})(d\vec{n} + \lambda\vec{t}) = d^2\vec{n}\vec{n} + \underbrace{\lambda d\vec{n}\vec{t}}_{0} + \lambda^2\vec{t}\vec{t}$

$|\vec{x}|^2 = d^2 + \lambda^2|\vec{t}|^2$ miminal, wenn $\lambda = 0$

mimimaler Abstand ist d



$\vec{n} * \vec{x} = d$ weitere Form

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

$x_1n_1 + x_2n_2 = d$

Hesse-Normalform $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ normalen Vektor (von 0 in Richtung Gerade) $|\vec{n}|^2 = 1 = n_1^2 + n_2^2$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ d = Abstand der Geraden zum Nullpunkt ≥ 0

$\boxed{x_1n_1 + x_2n_2 = d}$ $\qquad$ $\boxed{\vec{n} * \vec{x} = d}$

Wie kommen wir von der 2. Form zu Hesse?

$$x_1a_1 + x_2a_2 = r \xrightarrow[\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}]{\text{Division durch}} \frac{a_1}{\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}}x_1 + \frac{a_2}{\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}}x_2 = r,\ \text{denn}\ \left(\frac{a_1}{\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2 = 1$$

VZ so, dass $\frac{r}{\pm\sqrt{}} \geq 0$

Bsp.: 1)

$3x_1 + 4x_2 = 15$

Berechne Normalen Vektor und Abstand zum Nullpunkt

Division durch $\pm\sqrt{3^2+4^2}$, das VZ muss das der rechten Seite sein, also $+\sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 = 3$ Abstand vom NP: d=3 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

Bsp.: 2)

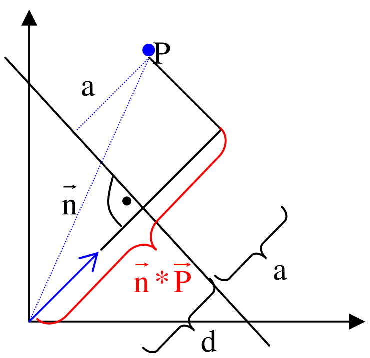
$3x_1 - 2x_2 = -1{,}5$ Division durch $-\sqrt{3^2+2^2} = -\sqrt{13}$

$-\frac{3}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}x_2 = \frac{3}{2\sqrt{13}}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ $d = \frac{3}{2\sqrt{13}}$

Abstand eines Punktes von Geraden: $P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Abstand von $x_1n_1 + x_2n_2 = d = 0$

Abstand $= a = y_1n_1 + y_2n_2 - d$



Abstand Punkt P zur Gerade a

$\vec{n} * \vec{P} = d + a$

$a = \vec{n} * \vec{P} - d$

$\vec{P} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

$a = n_1y_1 + n_2y_2 - d$ a<0, wenn $\vec{P}$ auf dem selben Ufer, wie der Nullpunkt liegt.

Berechne den Abstand des Punktes $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ von der Gerade!

$4x_1 - 2x_2 = 5$ Auf welchem Ufer liegt $\vec{P}$?

1. Schritt: Division durch $+\sqrt{4^2+2^2} = +\sqrt{20}$

$\frac{4}{\sqrt{20}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{20}}x_2 - \frac{5}{\sqrt{20}} = 0$ $a = \frac{4*3}{\sqrt{20}} - \frac{2*8}{\sqrt{20}} - \frac{5}{\sqrt{20}} = -\frac{9}{\sqrt{20}}$ liegt auf Nullpunkt Ufer

Abstand $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$ von $x_1 + x_2 = 2$

Hesse Form: $\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$ $a = \frac{20}{\sqrt{2}} + \frac{15}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{33}{\sqrt{2}}$

Auf Uferseite des Nullpunktes

Legen Sie eine Gerade durch $\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ von dieser Gerade

$\vec{P_1} - \vec{P_2}$ geht in Richtung der Geraden $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 2-5 \end{pmatrix}$

$\vec{N} = \begin{vmatrix} 2 & \vec{e_1} \\ -3 & e_2 \end{vmatrix}$ ist orthogonal zur Geraden

$=+3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\perp$ zur Gerade

$$\vec{n} = \frac{1}{\pm\sqrt{3^2+2^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} * \vec{P_1} = d = \frac{1}{\pm\sqrt{13}}(3*1+2*2) = \frac{1*7}{+\sqrt{13}}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad d=\frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$a = \vec{n} * \vec{Q} - d = \frac{1}{\sqrt{13}} * 16 - \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

Betrachte die Ebene $\mathbb{R}^3$ welche durch die Punkte $\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Bestimme den Abstand des Punktes $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von dieser Ebene!

$\vec{t_1} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$, $\vec{t_2} = \vec{P_3} - \vec{P_1}$ liegen in Ebene $\vec{t_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{t_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{N} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \vec{e_1} \\ -1 & -1 & \vec{e_2} \\ -4 & -2 & \vec{e_3} \end{vmatrix}$ steht $\perp$ auf Ebene

$\vec{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Division durch $\pm\sqrt{2^2+2^2+1^2} = \pm 3$ $\quad \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} * \vec{P} = d \pm (-2/3*0 + (-2/3)*1 + 1/3*(-1)) = -(-1) = 1$$
$$a = \vec{n} * \vec{Q} - d = 6/3 - 1 = 1$$

$\mathbb{R}^4$ gegeben die Punkte

$\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{P_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Diese spannen eine Ebene auf

1) Bestimme die Gleichung
2) Abstand von $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\quad \underbrace{\left(\vec{P_2}-\vec{P_1},\ \vec{P_3}-\vec{P_1},\ \vec{P_4}-\vec{P_1},\ \vec{x}\right)}_{\vec{n}*\vec{x}}=\underbrace{\left(\vec{P_2}-\vec{P_1},\ \vec{P_3}-\vec{P_1},\ \vec{P_4}-\vec{P_1},\ \vec{P_1}\right)}_{\vec{n}*\vec{P_1}}$$

$$\vec{n}*\vec{x}=\vec{n}*\vec{P_1}=d \qquad \boxed{\vec{n}*\vec{x}=d}$$

$$\left|\vec{P_2}-\vec{P_1},\ \vec{P_3}-\vec{P_1},\ \vec{P_4}-\vec{P_1},\ \begin{pmatrix}\vec{e_1}\\\vec{e_2}\\\vec{e_3}\\\vec{e_4}\end{pmatrix}\right|=\vec{N}\ \perp \text{ zu der Ebene}$$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}-1&0&0&\vec{e_1}\\1&2&2&\vec{e_2}\\1&0&1&\vec{e_3}\\-1&-1&0&\vec{e_4}\end{vmatrix}=3\vec{e_1}-\vec{e_2}+2\vec{e_3}-2\vec{e_4}\qquad \text{Division durch } \pm\sqrt{3^2+1^2+2^2+2^2}=\pm\sqrt{18}$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{N}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}\qquad d=\vec{n}*\vec{P_1}$$

$$d=\frac{8}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{7}{\sqrt{18}}$$

Bestimme alle Vektoren im $\mathbb{R}^4$, die orthogonal zu den Vektoren

$$\vec{t_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{ und }\vec{t_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\text{ sind. Allgemeine Lösung }\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\vec{t_1}*\vec{x}=0,\ \vec{t_2}*\vec{x}=0$$

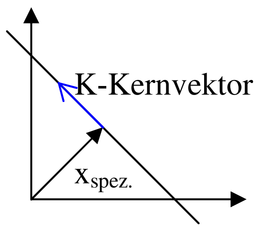
$$(1\ 0\ 1\ 0)*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0,\quad (2\ 1\ 1\ 0)*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\qquad \begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&1&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Lösung: $\vec{x}$ Kernvektor

$\vec{t_1},\vec{t_2},\dots,\vec{t_m}\in\mathbb{R}^n$ Finde alle Vektoren in $\mathbb{R}^n$ die $\perp$ zu diesen Vektoren sind.

Lösung: $\left(\vec{t_1},\vec{t_2},\dots,\vec{t_m}\right)^T=1$, $\vec{x}$ muss Kernvektor von A sein.

Bestimme die Schnittgerade der Ebenen



$$x_1+2x_2-3x_3=4,\ x_1+x_2-x_3=1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{x}=\overrightarrow{x_{speziell}}+\lambda*\text{Kernvektor}$$

Gegeben k-Vektoren (Spalten- oder Zeilenvektoren, derselben Dimension)

ab jetzt $\vec{V}=V$

$V^{(1)},V^{(2)},V^{(3)},\dots,V^{(k)}$

Gegeben k Zahlen $a_1,a_2,\dots,a_k$

$a_1V^{(1)}+a_2V^{(2)}+a_3V^{(3)}+\dots+a_kV^{(k)}$ Linearkombination der $V^{(1)}\dots V^{(k)}$

Die Linearkombination heißt trivial, wenn alle $a_i = 0$, sonst nichttrivial

Die Vektoren $V^{(1)} ... V^{(k)}$ heißen linear abhängig, wenn es eine nichttriviale Linearkombination gibt, die den Wert des Nullvektors hat

Bsp.: 1)

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ V^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0 \Rightarrow \text{linear unabhängig}$$

Bsp.: 2)

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ V^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ V^{(3)} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} \quad 1 * V^{(1)} + 5 * V^{(2)} - V^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Die Menge aller Linearkombinationen der $V^{(1)} ... V^{(k)}$ heißt lineare Hülle dieser Vektoren $\mathrm{Lin}\left(V^{(1)},...,V^{(k)}\right)$

$\mathrm{Lin}\left(V^{(1)},...,V^{(k)}\right)$ ist ein Vektorraum

A sei nxm-Matrix $ZA_1, ZA_2, ..., ZA_n$ seien die Vektoren, die durch die Zeilen von A gegeben sind.

$SA_1, SA_2, ..., SA_n$ seien die Vektoren, die durch die Spalten von A gegeben sind.

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}\ ZA_1 = (2\ 1\ 2),\ ZA_2 = (3\ 4\ 5),\ SA_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ SA_2 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ SA_3 = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$a_1SA_1 + a_2SA_2 + ... + a_mSA_m = A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_m\end{pmatrix}$$

$$b_1ZA_1 + b_2ZA_2 + ... + b_nZA_n = A\left(b_1 \cdots b_n\right)$$

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen in A heißt „Zeilenrang“ von A
Die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten in A heißt „Spaltenrang“ von A

$$\text{2x3 Matrix } \begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&7\end{pmatrix} \begin{matrix}\text{Spaltenrang=2}\\ \text{Zeilenrang=2}\end{matrix}$$

$A = \text{nxm} - \text{Matrix Zeilenrang} \le n,\ \text{Spaltenrang} \le m$

Satz: Zeilenrang = Spaltenrang, deshalb sprechen wir nur noch vom Rang einer Matrix

Probleme:

Was sind die Koeffizienten der linearen Abhängigkeiten?

also der $\left(b_1 \cdots b_n\right)$, so dass $b_1ZA_1 + b_2ZA_2 + ... + b_nZA_n = 0$ der Spaltenvektoren bzw. der Zeilenvektoren?

Was ist der Spaltenrang / Zeilenrang?

Satz:

- Die lineare Abhängigkeiten der Spalten sind die Linearkombinationen der Kernvektoren von A
- Die lineare Abhängigkeiten der Zeilen sind die Linearkombinationen der Zeilen der Kontrollmatrix
- Spaltenrang und Zeilenrang sind gleich der Anzahl der Zeilenführer der Treppenform

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeiten der
- Spaltenvektoren
- Zeilenvektoren

$Z_1 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2) \quad Z_2 = (1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 3) \quad Z_3 = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2) \quad Z_4 = (2\ 3\ 2\ 1\ 2\ 5)$

$a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3 + a_4Z_4 = 0$
für mindestens einen Koeffizienten $\neq 0$
$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0\ -1\ -1\ 1)$ ist nichttriviale lin. unabh.
einzige bis auf Skalare Vielfaches, dann ist der Rang=3
weil dann Z_1, Z_2, Z_3 linear unabhängig sin

einfacher: $(0\ -1\ -1\ 1) * (A) = (0\ 0\ 0\ 0)$

Spaltenabhängigkeiten
$1S_1 - 1S_3 = 0 \qquad 1S_1 - 1S_5 = 0 \qquad 1S_1 + 1S_2 - 1S_6 = 0$

$$\underbrace{(A) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0}_{\text{Kernvektoren ...}} \qquad (A) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (A) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Satz:
1) Alle linearen Abhängigkeiten der Spalten sind Linearkombinationen der Kernvektoren
2) Alle linearen Abhängigkeiten der Zeilen sind Linearkombinationen der Zeilen der Kontrollmatrix
3) Zeilenrang = Spaltenrang = Anzahl der Zeilenführer

Entzerrungsalgorithmus nxm-Matrix A

$$\boxed{A \mid I_n} \xrightarrow[\text{operationen}]{\text{Elementar-}} \underbrace{\boxed{MT \mid OP}}_{\text{Treppenform}} \rightarrow \overbrace{\boxed{\begin{array}{c|c} MT & OP \\ \hline \underbrace{0...0}_{\text{Nullmatrix}} & \underbrace{(...)}_{\text{Kontrollmatrix}} \end{array}}}^{\text{nicht Entzerrt}}$$

OP = Produkt der Matrizen der angewandten Elementaroperationen (diese waren invertierbar)
Folgerung: Op = invertierbar $(Op)^{-1}$ existiert MT=OP*A

Begründung zu 1:
Aus Def. von Kernmatrix folgt das Spalten der Kernmatrix $N_1, N_2, ..., N_r$ die Eigenschaften haben $A * N_i = 0$. Aus Entzerrungsalgorithmus wissen wir, dass jeder Kernvektor Linerkombination der Spalten der Kernmatrix ist.
Aber Lineare Abhängigkeit der Spalten = Kernvektor

Zusatz:
Spaltenrang = m – Anzahl der Spalten der Kernmatrix = Anzahl der Zeilenführer

Begründung zu 2)
Die Kontrollmatrix seien die Zeilen r bis n der OP-Matrix, d. h. die Zeilen r,…,n vom MT sind Nullmatrix

Kontrollmatrix * A = Zeilen r bis n von MT = Nullmatrix
beliebige Zeile von Kontrollmatrix * A = Nullvektor

Also definiert jede Zeile von der Kontrollmatrix eine lineare Abhängigkeit der Zeilen von A. Sind das ALLE????

Sei $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ Lineare Abhängigkeiten der Spalten von A

$$\vec{a} * A = 0 \Rightarrow A(OP)^{-1}\underbrace{(OP)A}_{MT} = 0 \Rightarrow \left(a(OP)^{-1}\right)MT = 0$$

Also $\tilde{a}$ lineare Zeilenabhängigkeit von MT $\Leftrightarrow$ $\tilde{a} * OP$ lineare Zeilenabhängigkeit von A
Wir bestimmen also nur noch die linearen Zeilenabhängigkeiten von MT

$$\text{Treppe}(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Die Lineare Abhängigkeiten von MT können keinen von Null verschiedenen Eintrag haben, der einen Zeilenführer korrespondiert (weil über und unter dem Zeilenführer nicht steht)

Ansatz: Betrachte: Kontrollmatrix$*(OP)^{-1} = Q$
$Q * MT = Q * OP * A = \text{Kontrollmatrix} * A = 0$

De linearen Abhängigkeiten von MT sind also Linearkombination der Zeilen von Kontrollmatrix * $(OP)^{-1}$
Also lineare Abhängigkeiten sind $\left((\text{Kontrollmatrix}) * OP^{-1}\right)OP = \text{Kontrollmatrix}$
Der Rang von MT ist offensichtlich die Anzahl der nicht-Null-Zeilen von MT und dies ist gleich der Anzahl der Zeilenführer. die Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix ändert den Rang nicht.

$$\underbrace{\text{Zeilenrang von MT}}_{\text{Anzahl der Zeilenführer}} = \text{Zeilenrang}\left(\underbrace{OP^{-1}MT}_{A}\right) = \text{Zeilenrang von A}$$

Zeilenrang = Spaltenrang

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Rang, linearen Abhängigkeit von Zeilen und Spalten?

Rang(A) = Anzahl der Zeilenführer = 3

$$\text{Treppe}(A * I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Lineare Zeilenabhängigkeit von A=(0,-1,-1,1)
Kontrollmatrix * A = (0,-1,-1,1)A

Spaltenabhängigkeit – Entzerrung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Kernvektor=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
Eine Abbildung $T * \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt linear, wenn für je zwei Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und Vektoren $\vec{V_1}, \vec{V_2} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$T\left(\lambda_1, \vec{V_1} + \lambda_2, \vec{V_2}\right) = \lambda_1 T\left(\vec{V_1}\right) + \lambda_2 T\left(\vec{V_2}\right)$$

Beispiele:

(1) Streckungen
(2) Drehungen
(3) Spiegelungen
(4) Matrizen

$T(\vec{V}) \underbrace{:=}_{\text{det}} A\vec{V}$ A sei nxm-Matrix

dies ist eine lineare Abbildung

$A(\lambda_1, \vec{V_1} + \lambda_2, \vec{V_2}) = A(\lambda_1\vec{V_1}) + A(\lambda_2\vec{V_2}) = \lambda_1 A\vec{V_1} + \lambda_2 A\vec{V_2}$

$T(\lambda_1\vec{V_1} + \lambda_2\vec{V_2})$

$\lambda_1 T(\vec{V_1}) + \lambda_2 A(\vec{V_2})$

Alle linearen Abbildungen:

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind durch Matrizen gegeben.

Beweis: Betrachte die $\vec{e_1},\dots,\vec{e_m}$ im $\mathbb{R}^m$ (Einheitsvektoren)

Setze: $\vec{S_1} = T(\vec{e_1}),\dots,\vec{S_m} = T(\vec{e_m})$, $\vec{S_1},\dots,\vec{S_m} \in \mathbb{R}^n$

Setze:

$$A = (\vec{S_1}, \vec{S_2}, \dots, \vec{S_m}) \text{ nxm-Matrix, } \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_m\vec{e_m}$$

$$A * \vec{x} = A * (x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_m\vec{e_m}) = x_1 \underbrace{A * \vec{e_1}}_{\substack{\text{1. Spalte von} \\ A = \vec{S_1}}} + x_2 A\vec{e_2} + \dots + x_m A\vec{e_m} = x_1\vec{S_1} + x_2\vec{S_2} + \dots + x_m\vec{S_m}$$

$$= x_1 T(\vec{e_1}) + x_2 T(\vec{e_2}) + \dots + x_m T(\vec{e_m}) = T(x_1\vec{e_1} + \dots + x_m\vec{e_m}) = T(\vec{x})$$

Also:

$A\vec{x} = T(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$

Eine lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist durch eine Matrix A_T

$A_T = (T(\vec{e_1}), T(\vec{e_2}), \dots, T(\vec{e_m}))$

Wann ist T surjektiv, injektiv, bijektiv???

1) Surjektiv: genau dann, wenn es für jedes $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $A_T\vec{x} = \vec{r}$

Also muss für die Kontrollmatrix K von A_T gelten: $K * \vec{r} =$ Nullmatrix $\quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^n$

Deshalb K = Nullmatrix, dass passiert nur, wenn $\text{Rang}(A_T) = n$

$\boxed{\text{nxm-Matrix ist surjektiv} \Leftrightarrow \text{Rang}(A_T) = n}$

2) Injektiv: A_T nicht injektiv, dann gibt es $\vec{x_1} \in \mathbb{R}^m$ und ein $\vec{x_2} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{x_1} \neq \vec{x_2}$

$A_T\vec{x_1} = A_T\vec{x_2}$ d. h. $A_T \underbrace{(\vec{x_1} - \vec{x_2})}_{\neq 0} =$ Nullvektor d. h. es gibt einen Kernvektor

$X = (\vec{x_1} - \vec{x_2}) \neq 0$ von A_T

A_T ist also genau dann injektiv, wenn es keinen Kernvektor gibt, wenn also der Rang von A_T gleich m ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_T \text{ nxm-Matrix ist injektiv} \Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A_T) = m}$$

3) $A = \text{bijektiv, wenn } n = m \text{ und } \operatorname{Rang}(A_T) = n \Leftrightarrow A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Drehungen + Spiegelungen: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Ein lineares T: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt Drehung, wenn

(1) Skalarprodukte erhalten bleiben, d. h.
$T(\vec{x}) * T(\vec{y}) \quad \vec{x} * \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(2) Rechtssystem werden in Rechtssysteme überprüft
Gilt nur (1) und wird ein Rechtssystem in ein Linkssystem überführt, so sprechen wir von einer Drehspiegelung

Bsp.: im $\mathbb{R}^3$

Drehung von $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit Winkel α

$$\left(\frac{13\cos(\alpha)}{14} + \frac{1}{14},\ -\frac{\cos(\alpha)}{7} - \frac{3\sin(\alpha)\sqrt{14}}{14} + \frac{1}{7},\ \ldots \right)$$

Wie sehe ich, ob eine Matrix eine Drehung ist??? T sei diese Matrix

$T(\vec{x}) * T(\vec{y}) = \vec{x} * \vec{y} \quad \forall x, y$

$(Tx)^T T\vec{y}$

$X^T (T^T T)\vec{y} = X^T y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T^T T = I_n$ (solche Matrizen heißen orthogonal)

Eine Matrix A ist orthogonal, wenn $A^T * A = I \Leftrightarrow$ Skalarprodukte bleiben erhalten
Matrix A führt Rechtssysteme in Rechtssysteme über genau dann, wenn det(A)>0
A Drehung $\Leftrightarrow$ A orthogonal + det(A)>0 (det(A)=1)
A Drehspiegelung $\Leftrightarrow$ A orthogonal + det(A)<0 (det(A)=-1)

Aufgabe: bestimme die Determinante einer orthogonalen Matrix A

$$\det(A^T A) = \det(I) = 1 = \det(A^T) * \det(A) = (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

Ist $A = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Drehung?
Wenn ja: Bestimme Drehachse und Winkel

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Also ist A Drehung! Wie finden wir jetzt die Drehachse?

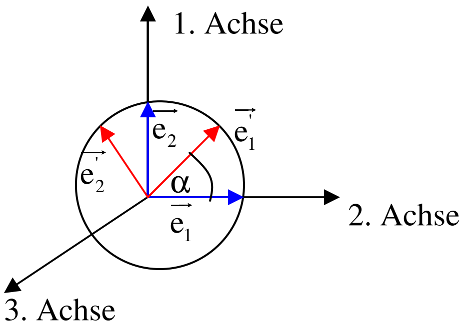
Drehachse: $= \vec{k} \quad A * \vec{k} = \vec{k}$

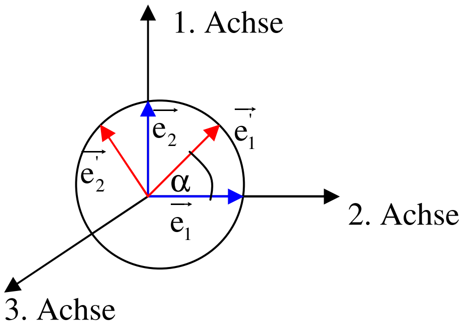
$A * \vec{k} = I\vec{k} \Rightarrow A * \vec{k} - I\vec{k} = 0 \Rightarrow (A - I)\vec{k} = 0$

Die Drehachse ist der Kernvektor von (A-I)

$$A - I = \begin{pmatrix} -2/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ I \\ \\ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 10/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \tilde{I} \\ \\ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Wir wählen } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ z-Achse}$$





<u>Bestimme die Matrix der Drehung um die 3-Achse zum Drehwinkel α!</u>

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_2' = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_1' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Drehungen von $\mathbb{R}^3$ Gegeben Drehachse $\vec{k}\left(\text{mit } \left|\vec{k}\right| = 1\right)$ Drehwinkel α

Stelle die Matrix auf!

<u>Eigenschaften:</u> Drehung ist Matrix $A(\alpha)$ mit

(1) $A * \vec{k} = \vec{k}$

(2) Jeder Vektor $\perp$ zu $\vec{k}$ und um den Winkel α in der Ebene $\perp$ zu $\vec{k}$ gesetzt.

$$A(\alpha)\vec{p} := \left(\vec{k}\vec{p}\right)\left(1 - \cos(\alpha)\right)\vec{k} + \cos(\alpha)\vec{p} + \sin(\alpha)\left(\vec{k} x \vec{p}\right)$$

Zeige dass diese Abbildung linear ist und die gesuchten Eigenschaften hat.

Spaltenrang und Zeilenrang sind gleich der Anzahl der Zeilenführer der Treppenform von A

Drehungen: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ M ist Drehung, wenn $M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

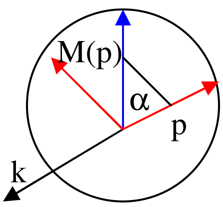
<u>Problem:</u>

1) Drehachse + Drehwinkel $\xrightarrow{?}$ Drehmatrix det(M)=1
2) Drehmatrix – Drehachse + Drehwinkel M lineare Abbildung

<u>Gegeben:</u>

Drehachse mit |k|=1 und Drehwinkel, dann ist M die gesuchte Drehung, wenn gilt:

- M(k) = k
- für jeden Vektor p $\perp$ k gilt:
  $M(p) = p * \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \quad kxp$



Konstruktion der linearen Abbildung dieser Drehung.

$\mathbb{R}^3 \ni q \xrightarrow{\varphi} \underbrace{<k,q>}_{\text{Skalare}}(1-\cos(\alpha))k+\cos(\alpha)q+\sin(\alpha) \quad kxq$

Bem.:

1) φ ist linear

2) es gilt k=q: $\varphi(k)=<k,k>(1-\cos(\alpha))k+\cos(\alpha)k+\sin(\alpha) \quad kxk \quad kxk=0$

   $=$ k+sin(α) kxk=k

3) q=p mit p $\perp$ k $\varphi(p)=<k,p>(1-\cos(\alpha))k+\cos(\alpha)p+\sin(\alpha) \quad kxp$

   da <k,p>=0 erhalten wir $\varphi(p)=\cos(\alpha)p+\sin(\alpha) \quad kxp \quad \varphi$ ist die gesuchte Drehung

Übersetzung von φ in eine Matrix M, also der Einzelteile

1) q - <k,q>k
2) q – kxq

1 Teil:

$$\psi(q)=<k,q>k \quad k=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(k*k^T)q \quad k*k^T=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}(k_1\ k_2\ k_3)=\begin{pmatrix}k_1*k_1 & k_1*k_2 & k_1*k_3\\ k_2*k_1 & k_2*k_2 & k_2*k_3\\ k_3*k_1 & k_3*k_2 & k_3*k_3\end{pmatrix}$$

2 Teil:

$$\psi_2(q)=kxq=\begin{pmatrix}k_2q_3-k_3q_2\\ k_3q_1-k_1q_2\\ k_1q_2-k_2q_1\end{pmatrix} \text{ Definition des Kreuzproduktes } =\begin{pmatrix}0 & -k_3 & k_2\\ k_3 & 0 & -k_1\\ -k_2 & k_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat dieselbe Wirkung kxq

k sei Achse mit |k|=1

$$\text{Drehung (Achse}=k,\alpha)=(1-\cos(\alpha))(a_{ij}=k_ik_j)+\cos(\alpha)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\sin(\alpha)\begin{pmatrix}0 & -k_3 & k_2\\ k_3 & 0 & -k_1\\ -k_2 & k_1 & 0\end{pmatrix}$$

Gegeben Drehmatrix z. B.

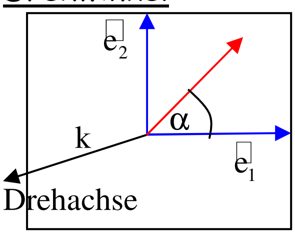
$$M=\begin{pmatrix}-2/3 & 2/3 & -1/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ -1/3 & -2/3 & -2/3\end{pmatrix}$$ Bestimme Drehachse und Drehwinkel

Drehachse! M*k=k M*k=I*k (M-I)*k=0

Bestimme den Kernvektor von M-$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Wenn (M-I) zwei linear unabhängige Kernvektoren hat, dann M=I (trivial)

Drehwinkel



Ebene $\perp$ zu k

M sei eine yxy-Matrix. Bestimme ln(M) e^M

Bsp.: Differenzialgleichung

Gesucht y(t) welche erfüllt y(t)=ayt

Lösung:
$y(t) = ce^{at}$

mit mehreren Komponenten

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \qquad a=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \qquad y(t)=ay$$

Lösung:
$y(t)=e^{ta}y(0)$

$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$ Wenn ich nur wüsste, was e^{Matrix} ist!?!

Sei M eine nxn-Matrix: berechne die Eigenvektoren
$0 \neq y \in \mathbb{C}^n$ heißt Eigenvektor, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, mit $My=\lambda y$, λ heißt dann Eigenwert

Berechne die Eigenwerte zuerst:

Eigenvektoren

$M = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 27 \\ 9/2 & -51/2 & 103/2 \\ 3/2 & -21/2 & 43/2 \end{pmatrix}$ Macht Sinn nur bei quadratischen Matrizen

Eigenwerte

$\det\left(M - X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \longrightarrow$ Polynom, weil Eigenvektor zu X ein Kernvektor dieser Matrix.

Bsp.:
det(…)=0 $\qquad x-x^3=0$

Gesucht: Nullstellen x=0, x=1, x=-1
Zu jeder Nullstelle gibt es min. einen Kernvektor (Entzerrungsalgorithmus)

x=1

$M-1*\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 27 \\ 9/2 & -51/2 & 103/2 \\ 3/2 & -21/2 & 43/2 \end{pmatrix}$ diese muss entzerrt werden $\rightarrow$ Kernvektor

$KV=\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Probe: $M*KV=\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ stimmt = 1KV

e^{tM} M=Matrix welche Eigenschaften will ich haben???
$e^{t_1M} * e^{t_2M} = e^{(t_1+t_2)M}$

Gesucht: Funktion e^{tM} mit der Funktionsgleichung
Wir fangen einfach an

$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Dann def. wir $e^{tM} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_1} \end{pmatrix}$

$$e^{t_1M} * e^{t_2M} = \begin{pmatrix} e^{t_1\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t_1\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t_2\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t_2\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t_1\lambda_1} * e^{t_2\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t_1\lambda_2} * e^{t_2\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(t_1+t_2)\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{(t_1+t_2)\lambda_2} \end{pmatrix} = e^{(t_1+t_2)M}$$

Mache aus „allgemeinem" M eine Diagonalmatrix!

Situation: M sei nxn-Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren

$EV_1, EV_2, ..., EV_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

Spiele mit B=($EV_1, EV_2, ..., EV_n$)

Erinnerung: A*Q   Q=($Q_1, Q_2, ..., Q_k$) $= (AQ_1, AQ_2, ..., AQ_k)$

$$M * B = (M * EV_1, M * EV_2, ..., M * EV_n) = (\lambda_1 EV_1, \lambda_2 EV_2, ..., \lambda_n EV_n)$$

$$B * \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 * 1\text{Spalte B}, \lambda_2 * 2\text{Spalte B}, ..., \lambda_n * n - \text{teSpalte B})$$

$$= (\lambda_1 EV_1, \lambda_2 EV_2, ..., \lambda_n EV_n) = M * B$$

$$B^{-1} * M * B = B^{-1}\left(B * \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

B diagonalisiert M, wenn gilt $B^{-1}MB = \text{Diagonalmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

In diesem Falle definieren wir

$$e^{tM} = B \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} B^{-1}$$

Erfüllt dies die Funktionalgleichung???

$$e^{t_1M} * e^{t_2M} = B \begin{pmatrix} e^{t_1\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_1\lambda_n} \end{pmatrix} B^{-1} B \begin{pmatrix} e^{t_1\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_2\lambda_n} \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t_1\lambda_1} e^{t_2\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_1\lambda_n} e^{t_2\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{(t_1+t_2)M}$$

ln(M) – Funktionalkalkül

Polynom

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0 = P(x)$ Polynom vom Grad n

Finde die Nullstellen

n=2

ax²+bx+c=0   quadratische Ergänzung, pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

n=3 Gibt es entsprechende Formeln
n=4 Gibt es entsprechende Formeln (steht aber nirgends) – wir auf n=3 zurückgeführt
n=5 geht prinzipiell nicht

Wenn in P(x) alle Koeffizienten ganzzahlig sind, dann ist jede rationale Nullstelle Teiler von $a_0 \rightarrow$ „Satz von Gauß"

Bsp.: $P(x)=x - 3x^2 - x^3 + 3 = 0$
Kandidaten für rationale Nullstellen sind: 1, 3, –1, –3

Weitere Nullstellen in dem wir die erste Nullstelle nutzen, um es auf ein Polynom 2 Grades zurückzuführen.

$$\frac{P(x)-0}{x-x_0} \qquad x_0 = \text{Nullstelle}$$

Finde die Nullstellen von x^5-1=0 Was sind die Nullstellen dieses Polynoms?

Leichte Suche aller 2x2-Matrizen x mit $x^5-I_2=0$

$e^{\frac{2\pi}{n}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$ n=1, 2, 3, 4, 5

Neue Zahlen: $1=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $i=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$i^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-1*\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-1*1$$